

Momentum módszer (5. előadás)

Legyen X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású minta.

- 1 Az eloszlás k . momentuma, ha ϑ az ismeretlen paraméter: $\mu_{k,\vartheta} = \mathbb{E}_{\vartheta}(X_1^k)$.
- 2 Legyen $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^k$ az eloszlás k . tapasztalati momentuma.
- 3 Írjuk fel az alábbi egyenleteket a legkisebb olyan k -ig, amire az egyenletrendszer egyértelműen meghatározza ϑ -t (**bár nincs mindig ilyen k**):

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j;$$

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X_1^2) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2;$$

...

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X_1^k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^k.$$

- 4 A ϑ momentum módszerrel kapott becslése az a $\hat{\vartheta}$, ami megoldása a fenti egyenletrendszernek. **Nem mindig létezik, nem mindig egyértelmű, nem feltétlenül hatásos.**

Momentum módszer: Poisson- és exponenciális eloszlás

X_1, \dots, X_n független **Poisson-eloszlásúak** ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$ -hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \bar{X}.$$

Mivel a λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke λ :

$$\hat{\lambda} = \bar{X}.$$

Momentummódszer: Poisson- és exponenciális eloszlás

X_1, \dots, X_n független **Poisson-eloszlásúak** ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$ -hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \bar{X}.$$

Mivel a λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke λ :

$$\hat{\lambda} = \bar{X}.$$

X_1, \dots, X_n független **exponenciális** eloszlásúak ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$ -hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \bar{X}.$$

Ez egyértelműen oldható meg λ -ra:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

Momentum módszer: normális eloszlás

X_1, \dots, X_n független $N(m, \sigma^2)$ eloszlású minta (azaz normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással).

A $k = 1$ -hez és $k = 2$ -höz tartozó egyenletek:

$$\mathbb{E}_{m,\sigma}(X_1) = m = \bar{X};$$

$$\mathbb{E}_{m,\sigma}(X_1^2) = \sigma^2 + m^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2.$$

A másodikba beírva az elsőt: $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \bar{X}^2 = s_n^2$ (a tapasztalati szórásnégyzet). Tehát az első két egyenlet együtt egyértelműen oldható meg, a momentum módszerrel kapott becslés:

$$\hat{m} = \bar{X}; \quad \hat{\sigma} = s_n.$$

Momentum módszer: egyenletes eloszlás

Legyen X_1, \dots, X_n független minta az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlásból. Ennek várható értéke $(a + b)/2$, szórása $(b - a)/\sqrt{12}$. Ezek alapján a $k = 1$ -hez és $k = 2$ -höz tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_{a,b}(X_1) = \frac{a + b}{2} = \bar{X};$$
$$\mathbb{E}_{a,b}(X_1^2) = \frac{(b - a)^2}{12} + \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2.$$

A másodikba beírva az elsőt: $\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \bar{X}^2 = s_n^2$, amiből

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}s_n; \quad \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}s_n.$$

Hátránya: előfordulhat, hogy ezek nem is lehetséges értékek: ha \hat{a} nagyobb a legkisebb megfigyelésnél, vagy \hat{b} kisebb a legnagyobb megfigyelésnél.

Elégséges statisztika

Definíció

Legyen X_1, \dots, X_n független minta ϑ paraméterű eloszlásból. A T statisztika elégséges, ha a likelihood-függvény felírható a következő alakban megfelelő h és g függvényekkel:

$$L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = h(X_1, \dots, X_n) \cdot g_{\vartheta}(T(X_1, \dots, X_n)).$$

Elégséges statisztika

Definíció

Legyen X_1, \dots, X_n független minta ϑ paraméterű eloszlásból. A T statisztika elég-séges, ha a likelihood-függvény felírható a következő alakban megfelelő h és g függvényekkel:

$$L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = h(X_1, \dots, X_n) \cdot g_{\vartheta}(T(X_1, \dots, X_n)).$$

Például Poisson-eloszlás esetén $T(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n X_j$ elég-séges statisztika:

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda^{X_j}}{X_j!} e^{-\lambda} \right) = \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{X_j!} \right) \cdot \lambda^{\sum_{j=1}^n X_j} e^{-n\lambda}.$$

Poisson-eloszlás esetén a $T(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n X_j$ vagy a $T(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}$, normális eloszlás esetén $T(X_1, \dots, X_n) = (\bar{X}, s_n^2)$ elég-séges statisztika.

Az elég-séges statisztika nem egyértelmű.

Ha létezik ML-beclés, T pedig elég-séges statisztika, akkor az ML-beclés felírható $s(T(X_1, \dots, X_n))$ alakban valamely s függvényre.

Rao–Blackwell-tétel

Tétel (Rao–Blackwell)

Tegyük fel, hogy a T statisztika torzítatlan becslés a ϑ paraméterre, valamint S elégséges statisztika ϑ -ra. Ekkor megadható olyan T^ becslés, melyre*

- $T^* = h(S)$ megfelelő h függvénnyel;
- T^* torzítatlan ϑ -ra: $\mathbb{E}_{\vartheta}(T^*) = \vartheta$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- T^* hatásosabb, mint T : $D_{\vartheta}(T^*) \leq D_{\vartheta}(T)$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra.

Ha az S statisztika teljes is (azaz minden olyan f függvény, melyre $\mathbb{E}_{\vartheta}(f(S)) = 0$ minden ϑ -ra, „majdnem mindenütt” nulla), akkor T^ hatásos, azaz minden torzítatlan becslésnél hatásosabb.*

A megoldás az $\mathbb{E}(T|S)$ feltételes várható érték lesz. Például Poisson-eloszlásnál $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{j=1}^n X_j) = \bar{X}$ hatásos.

Állítás

Poisson-eloszlásnál normális eloszlásoknál (m -re) a mintaelemek összege teljes elégséges statisztika, a mintaátlag pedig hatásos becslése a paraméternek.

Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_{\vartheta}(X_1) \right)^2 \right),$$

ahol f_{ϑ} a likelihoodfüggvény \mathbb{P}_{ϑ} mellett.

Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_{\vartheta}(X_1) \right)^2 \right),$$

ahol f_{ϑ} a likelihoodfüggvény \mathbb{P}_{ϑ} mellett.

- Megfelelő (regularitási) feltételek mellett a független azonos eloszlású, n elemű minta Fisher-információja: $I_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\vartheta)$.
- Ha T elégséges statisztika, akkor $T(X_1, \dots, X_n)$ Fisher-információja ugyanaz, mint (X_1, \dots, X_n) Fisher-információja (például Poisson-eloszlásnál az átlag Fisher-információja ugyanaz, mint a teljes mintáé).
- **Cramér–Rao-egyenlőtlenség**: megfelelő (regularitási) feltételek mellett, ha T torzítatlan becslés ϑ -ra, akkor

$$D^2(T(X)) \geq \frac{1}{I_n(\vartheta)} = \frac{1}{nI_1(\vartheta)}.$$

(Ebben az értelemben feleakkora szóráshoz négyszer annyi mintaelem kell.)

Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_{\vartheta}(X_1) \right)^2 \right),$$

ahol f_{ϑ} a likelihoodfüggvény \mathbb{P}_{ϑ} mellett.

Néhány nevezetes eloszlás Fisher-információja egy mintaelemből:

- binomiális eloszlás n renddel és p paraméterrel:

$$\frac{n}{p(1-p)}.$$

- Poisson-eloszlás λ paraméterrel: $1/\lambda$
- normális eloszlás, ha $\vartheta = (m, \sigma)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

Fisher-információ: Poisson-eloszlás

Egy mintaelem **Fisher-információja** (az f_λ likelihood-függvény most a valószínűség):

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f_\lambda(X_1) \right)^2 \right) = \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log \left(\frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \right) \right)^2 \right) = \\ &= \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(X_1 \log \lambda - \log X_1! - \lambda \right) \right)^2 \right) = \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{X_1}{\lambda} - 1 \right)^2 \right) = \\ &= \mathbb{E}_\lambda \left(\frac{X_1^2}{\lambda} - 2 \frac{X_1}{\lambda} + 1 \right) = \frac{\lambda + \lambda^2}{\lambda} - 2 + 1 = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy Poisson-eloszlásnál $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = D_\lambda(X_1) = \lambda$, így

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1^2) = D_\lambda^2(X_1) + \mathbb{E}_\lambda^2(X_1) = \lambda + \lambda^2.$$

Házi feladat március 13., 9:00-ig

Tekintsük a testmagasságról kapott húszelemű adatsort. Tegyük fel, hogy a testmagasság normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással (ezek ismeretlen paraméterek).

- Írjuk fel a likelihood-függvényt.
- Ábrázoljuk az $L_{n,m,\sigma}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ függvényt m függvényében úgy, hogy $\sigma = s_n - 2$, $\sigma = s_n$, $\sigma = s_n^*$, illetve $\sigma = s_n^* + 2$ (egy ábrán szerepeljen a négy különböző görbe). Ezeken a lehetőségeken belül milyen (m, σ) párra látjuk a legnagyobb értéket?
- Ábrázoljuk az $L_{n,m,\sigma}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ függvényt σ függvényében úgy, hogy $m = \bar{X} - 3$, $m = \bar{X}$, illetve $m = \bar{X} + 3$ (egy ábrán szerepeljen a három különböző görbe). Ezeken a lehetőségeken belül milyen (m, σ) párra látjuk a legnagyobb értéket?

(Vagy: ábrázoljuk a likelihood-függvényt mint (m, σ) kétváltozós függvényt.)

Házi feladat március 13., 9:00-ig

Tekintsük a testmagasságokról kapott húszelemű adatsort. Tegyük fel, hogy a testmagasság normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással (ezek ismeretlen paraméterek).

A likelihood-függvény egy 94 elemű valós mintából:

$$\begin{aligned} L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) &= \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right] = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n X_j^2 - 2m \sum_{j=1}^n X_j + nm^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left(-\frac{2881400 - 2m \cdot 16428 + 94 \cdot m^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Házi feladat március 13., 9:00-ig

testmagassag<-c(186,180,197,191,181,178,193,177,167,163,164,170,178,152,207,155)

A testmagasságadatok mindegyikéből vonjunk le 175-öt, hogy ne legyen túl kicsi a függvény értéke, és numerikusan számolható legyen, ne nullákat kapjunk.

```
> sum(testmagassag-175)
```

```
[1] -22
```

```
> sum((testmagassag-175)*(testmagassag-175))
```

```
[1] 10350
```

```
> length(testmagassag)
```

```
[1] 94
```

$$\begin{aligned} L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left(- \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2 - 2m \sum_{j=1}^n X_j + nm^2}{2\sigma^2} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^{94} \exp \left(- \frac{10350 - 2m \cdot (-22) + 94 \cdot m^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

Házi feladat március 13., 9:00-ig

Ábrázoljuk az $L_{n,m,\sigma}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ függvényt m függvényében úgy, hogy $\sigma = s_n - 2$, $\sigma = s_n$, $\sigma = s_n^*$, illetve $\sigma = s_n^* + 2$ (egy ábrán szerepeljen a négy különböző görbe). Ezeken a lehetőségeken belül milyen (m, σ) párra látjuk a legnagyobb értéket?

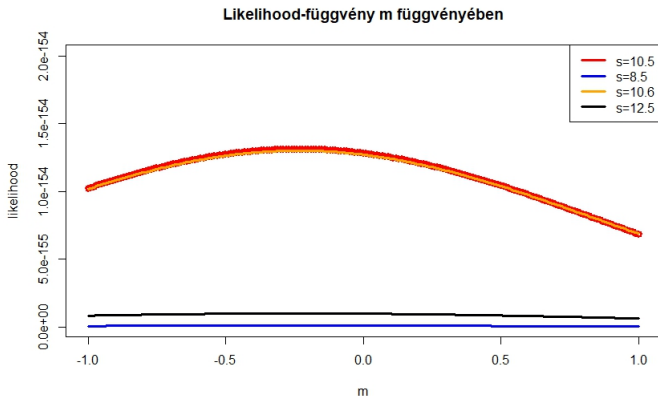
$$\begin{aligned} L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n \exp \left(- \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2 - 2m \sum_{j=1}^n X_j + nm^2}{2\sigma^2} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^{94} \exp \left(- \frac{10350 - 2m \cdot (-22) + 94 \cdot m^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

Most a $\sigma = s_n - 2 = 8,5$, $\sigma = s_n = 10,5$, $\sigma = s_n^* = 10,6$ és $\sigma = s_n + 2 = 12,5$ értékeket fogjuk beírni.

Likelihood-függvény m függvényében

```
slikelihood<-function(s) {  
  mlikelihood<-function(m){ (1/(sqrt(2*pi)*s)^94)*  
    exp(-(10350-2*m*(-22)+94*m^2)/2/s^2)}  
  return(mlikelihood)}  
  
x=seq(from=-1, to=1, by=0.01)  
  
l1=sapply(x, slikelihood(10.5))  
plot(l1 x, col="red", lwd="3", xlim=c(-1, 1), ylim=c(10^(-156), 2*10^(-154)),  
xlab="m", ylab="likelihood", main="Likelihood-függvény m függvényében")  
l2=sapply(x, slikelihood(8.5))  
lines(l2 x, col="blue", lwd="3")  
l3=sapply(x, slikelihood(10.6))  
lines(l3 x, col="orange", lwd="3")  
l4=sapply(x, slikelihood(12.5))  
lines(l4 x, col="black", lwd="3")  
  
legend("topright", c("s=10.5", "s=8.5", "s=10.6", "s=12.5"), col=c("red", "blue",  
"orange", "black"), lwd="3")
```

Likelihoodfüggvény m függvényében



$n = 94$ elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve. Az átlag: $\bar{X} = 174,8$, ez $-0,2$ -nek felel meg (mindenből levontunk 175-öt), a tapasztalati szórás $s_n = 10,5$. Ezek adják a maximumot.

Likelihoodfüggvény σ függvényében

Ábrázoljuk az $L_{n,m,\sigma}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ függvényt σ függvényében úgy, hogy $m = \bar{X} - 3$, $m = \bar{X}$, illetve $m = \bar{X} + 3$ (egy ábrán szerepeljen a három különböző görbe). Ezekon a lehetőségeken belül milyen (m, σ) párra látjuk a legnagyobb értéket?

$$\begin{aligned} L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n \exp \left(- \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2 - 2m \sum_{j=1}^n X_j + nm^2}{2\sigma^2} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^{94} \exp \left(- \frac{10350 - 2m \cdot (-22) + 94 \cdot m^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

Most az $m = \bar{X} - 3 = -3, 2$, $m = \bar{X} = -0, 2$, $m = \bar{X} + 3 = 2, 8$ értékeket fogjuk beírni (a valódi átlag 174, 8, de mindenből levontunk 175-öt).

Likelihood-függvény σ függvényében

```
mlikelihood<-function(m)
```

```
{ slikelihood<-function(s){
```

```
(1/(sqrt(2*pi)*s)^94)*exp(-(10350-2*m*(-22)+94*m^2)/2/s^2)}
```

```
return(slikelihood)}
```

```
x=seq(from=9, to=11, by=0.01)
```

```
l1=sapply(x, mlikelihood(-0.2))
```

```
plot(l1 x, col="red", lwd="3", xlim=c(9, 11), ylim=c(10^(-156), 1.5*10^(-154)),  
xlab="m", ylab="likelihood", main="Likelihood-függvény s függvényében")
```

```
l2=sapply(x, mlikelihood(-3.2))
```

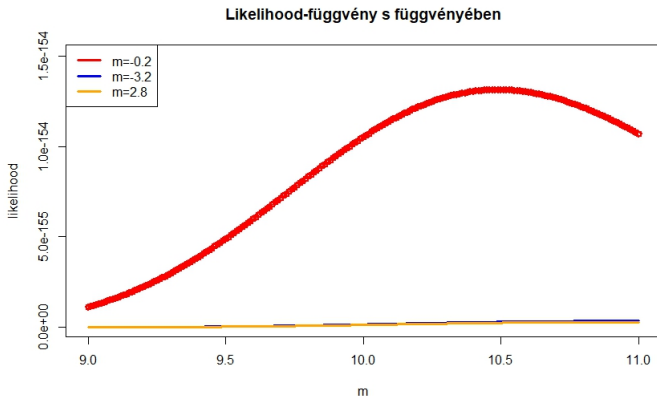
```
lines(l2 x, col="blue", lwd="3")
```

```
l3=sapply(x, mlikelihood(2.8))
```

```
lines(l3 x, col="orange", lwd="3")
```

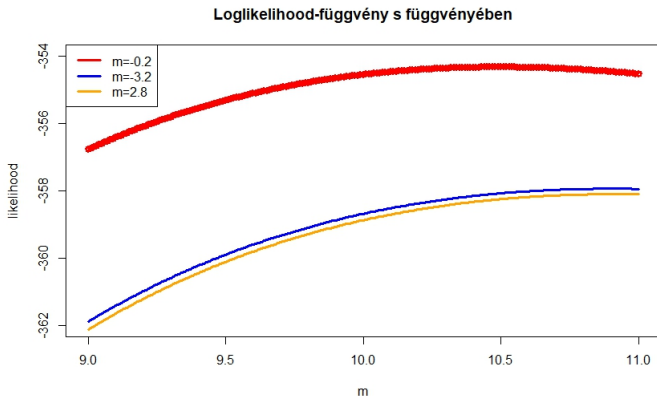
```
legend("topleft", c("m=-0.2", "m=-3.2", "m=2.8"), col=c("red", "blue", "orange",  
"black"), lwd="3")
```

Likelihoodfüggvény σ függvényében



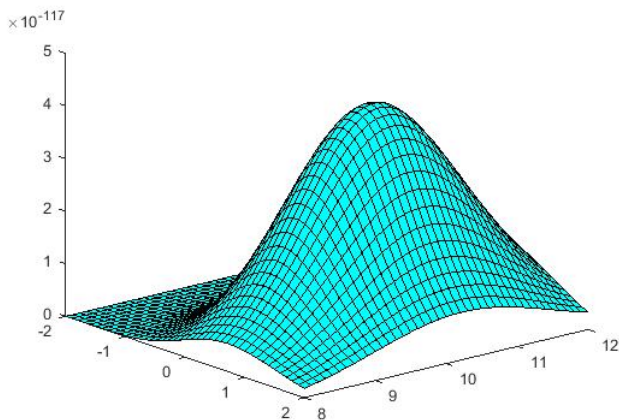
$n = 94$ elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve. Az átlag: $\bar{X} = 174,8$, ez $-0,2$ -nek felel meg (mindenből levontunk 175-öt), a tapasztalati szórás $s_n = 10,5$. Ezek adják a maximumot.

Log-likelihoodfüggvény σ függvényében



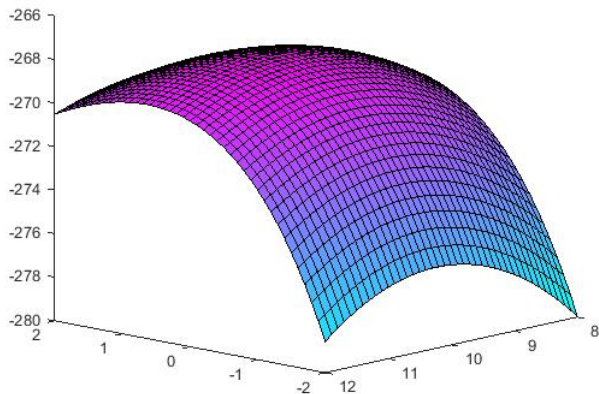
$n = 94$ elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve. Az átlag: $\bar{X} = 174,8$, ez $-0,2$ -nek felel meg (mindenből levontunk 175-öt), a tapasztalati szórás $s_n = 10,5$. Ezek adják a maximumot.

Likelihoodfüggvény



$n = 94$ elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve.
Az átlag: $\bar{X} = 174,8$, a tapasztalati szórás $s_n = 10,5$.

Log-likelihoodfüggvény



$n = 94$ elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve.
Az átlag: $\bar{X} = 174,8$, a tapasztalati szórás $s_n = 10,5$.

Konfidenciaintervallumok

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ és $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ független azonos eloszlású minta. Tegyük fel, hogy ϑ valós paraméter, vagyis $\Theta \subseteq \mathbb{R}$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $(T_1(\underline{X}), T_2(\underline{X}))$ intervallum legalább $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum ϑ -ra, ha minden $\vartheta \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1(\underline{X}) < \vartheta < T_2(\underline{X})) \geq 1 - \alpha.$$

A konfidenciaintervallum megbízhatósági szintje: $\inf_{\vartheta \in \Theta} \{\mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \in (T_1, T_2))\}$.

Konfidenciaintervallum

Példa: hatvan különböző mintából megmértük a talajvíz pH-értékét egy adott helyen.

A minta egy részlete:

5,98 6,1 5,99 6,21 5,97 6,23 ... 5,85

Alapstatisztikák: $n = 60$ (méret), $\bar{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korrigált tapasztalati szórás)

Konfidenciaintervallum

Példa: hatvan különböző mintából megmértük a talajvíz pH-értékét egy adott helyen.

A minta egy részlete:

5,98 6,1 5,99 6,21 5,97 6,23 ... 5,85

Alapstatisztikák: $n = 60$ (méret), $\bar{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korigált tapasztalati szórás)

Cél: a várható érték becslése az adatok alapján

pontosabban: adjunk meg egy olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza az "igazi" várható értéket – ezt fogjuk **95 % megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumnak** hívni

Konfidenciaintervallum a várható értékre

A Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, azaz ha $Z \sim N(0, 1)$:

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-s^2/2} ds.$$

Állítás (Konfidenciaintervallum a várható értékre, **ismert szórás**)

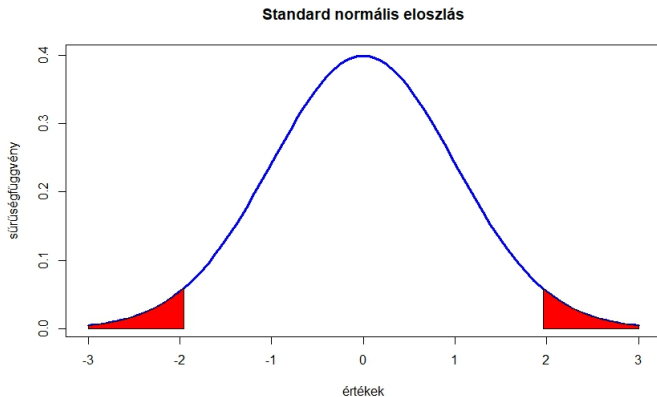
Tegyük fel, hogy X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású **normális eloszlású** valószínűségi változók, melyek szórása, σ ismert.

Ekkor a

$$(T_1, T_2) = \left(\bar{X} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű **kétoldali konfidenciaintervallum** az eloszlás várható értékére.

A kétoldali z-próba kritikus értéke



Az $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali z-próba (u -próba) kritikus értéke:
 $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

$$(T_1, T_2) = \left(\bar{X} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_m(T_1 \leq m \leq T_2) &= \mathbb{P}_m\left(m - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq m + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}_m\left(-\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \\ &= 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy mivel X_1, \dots, X_n független $N(m, \sigma^2)$ eloszlásúak, így $\bar{X} \sim N(m, \sigma^2/n)$ eloszlású. Ezért $Z = (\bar{X} - m)/(\sigma/\sqrt{n})$ standard normális eloszlású, vagyis

$$\mathbb{P}(-a \leq Z \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1.$$

Példa konfidenciaintervallumra

Minta: megmértük a talajvíz pH-értékét, tegyük fel, hogy ez **normális eloszlású, valódi szórása 0,2**.

$n = 60$ (méret), $\bar{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korrigált tapasztalati szórás)

Adjunk meg olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza a pH-érték valódi várható értékét.

megbízhatósági szint: $1 - \alpha = 95\%$, azaz $\alpha = 0,05$. Ebből $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$.

95 %-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a várható értékre:

$$\left(5,99 - 1,96 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{60}}, 5,99 + 1,96 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{60}} \right) = (5,94; 6,04).$$

Kisebb mintaelemszámhoz hosszabb, nagyobb megbízhatósághoz szintén hosszabb konfidenciaintervallum tartozik.

Fisher–Bartlett-tétel

Valójában az eloszlás valódi szórása a legtöbb esetben nem ismert. A σ szórást az s_n^* korrigált tapasztalati szórással helyettesítjük. Kérdés, hogyan változik így az eloszlás.

Tétel (Fisher–Bartlett)

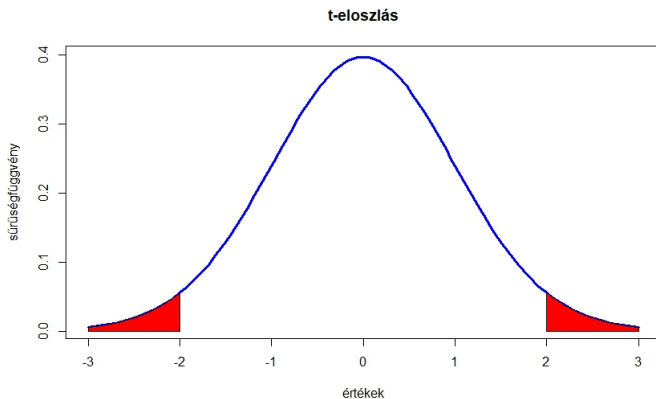
Tegyük fel, hogy X_1, X_2, \dots, X_n független m várható értékű, σ szórású, **normális eloszlású** valószínűségi változók. Ekkor

- 1 $\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$;
- 2 \bar{X} és s_n^* függetlenek;
- 3 $(n-1)s_n^{*2}/\sigma^2$ eloszlása $n-1$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlás;
- 4 $\frac{\bar{X}-m}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}$ eloszlása $n-1$ szabadsági fokú t -eloszlás.

Itt

$$s_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \right) - \bar{X}^2 \right)}.$$

t -eloszlás kritikus értékei



Az $f = 59$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke:
 $t_{59,0,05} = 2,001$.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

Legyenek Z_0, Z_1, \dots, Z_n független $N(0, 1)$ eloszlásúak, és $t_{f, \alpha}$ az f szabadsági fokú α terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú t -eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise:

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}(Y \leq t_{f, \alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}} \leq t_{f, \alpha}\right).$$

Az $Y = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}}$ valószínűségi változó eloszlása f szabadsági fokú **t -eloszlás**.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

Legyenek Z_0, Z_1, \dots, Z_n független $N(0, 1)$ eloszlásúak, és $t_{f, \alpha}$ az f szabadsági fokú α terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú t -eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise:

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}(Y \leq t_{f, \alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}} \leq t_{f, \alpha}\right).$$

Az $Y = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}}$ valószínűségi változó eloszlása f szabadsági fokú **t -eloszlás**.

Állítás (Konfidenciaintervallum a várható értékre, ismeretlen szórás)

Tegyük fel, hogy X_1, \dots, X_n független $N(m, \sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változók (m, σ ismeretlenek). Ekkor a

$$(T_1, T_2) = \left(\bar{X} - t_{n-1, \alpha} \cdot \frac{s_n^*}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, \alpha} \cdot \frac{s_n^*}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű **kétoldali konfidenciaintervallum** az eloszlás várható értékére.

Példa konfidenciaintervallumra

Minta: megmértük a talajvíz pH-értékét, tegyük fel, hogy ez **normális eloszlású**, szórása nem ismert.

$n = 60$ (méret), $\bar{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korigált tapasztalati szórás)

Adjunk meg olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza a pH-érték valódi várható értékét.

megbízhatósági szint: $1 - \alpha = 95\%$, azaz $\alpha = 0,05$. Az $f = 59$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke: $t_{59,0,975} = 2$.

95 %-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a várható értékre:

$$\left(5,99 - 2 \cdot \frac{0,18}{\sqrt{60}}, 5,99 + 2 \cdot \frac{0,18}{\sqrt{60}} \right) = (5,94; 6,04).$$

Hosszabb intervallumot kaptunk, mint ismert szórás esetén.

Házi feladat március 20., 9:00-ig

Legyen X_1, X_2, \dots, X_n független, $n = 10000$ elemű, $N(m, \sigma)$ eloszlású minta, ahol $m \neq 0$ és $\sigma \neq 1$ tetszőlegesen választott értékek.

Csoportosítsuk a mintaelemeket úgy, hogy minden csoportba tíz megfigyelés essen (első tíz, második tíz, stb.) Legyen a_j a j . csoportba eső megfigyelések átlaga, s_j^* pedig a j . csoportba eső megfigyelések korrigált tapasztalati szórása ($j = 1, 2, \dots, 1000$). Legyen továbbá

$$Z_j = \frac{a_j - m}{s_j^*} \cdot \sqrt{10} \quad (j = 1, 2, \dots, 1000).$$

Készítsünk a Z_j értékekből hisztogramot, és ábrázoljuk ezt együtt az $f = 9$ szabadsági fokú t -eloszlás, az $f = 10$ szabadsági fokú t -eloszlás, illetve a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényével (lehet egy ábrán, de három külön ábrán is). Melyik sűrűségfüggvény illeszkedik a legjobban? Melyik a Z_j valódi sűrűségfüggvénye?