2. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. december 7.

(1) Egy osztályba 15 fiú és 10 lány jár. Tegyük fel, hogy a diákok egymástól függetlenül balkezesek, a fiúk $0,27$, a lányok $0,23$ valószínűséggel. Számítsuk ki a balkezes fiúk számának és a balkezes lányok számának *szorzatának* a szórását. (10 pont)

(2) Tízszer dobunk egy dobókockával. Jelölje Y, hogy hányszor fordult elő, hogy két egymás után dobott szám különbségének abszolút értéke 1. Számítsuk ki Y szórását. (10 pont)

(3) Egy cukrászdában diós és mákos bejglit árulnak. Tegyük fel, hogy a diós bejglit vásárlók száma (egy hét alatt) Poisson-eloszlású 100 várható értékkel, a mákos bejglit vásárlók száma ettől független Poisson-eloszlású 120 várható értékkel. A diós bejgli 1500, a mákos 1800 forintba kerül. Számítsuk ki a bejgli eladásából származó heti bevételnek és az ugyanazon a héten eladott összes bejgli számának korrelációs együtthatóját. (10 pont)

(4) Egy virágkereskedésnek három üzlete van. A belvárosi üzletben az egy napon vásárlók száma 40 várható értékű, a két másik üzletben 30 várható értékű valószínűségi változó. A szórás mindhárom esetben 5, és tegyük fel, hogy az egyes üzletek forgalma független egymástól. Jelölje X, hogy egy adott napon a három üzletben átlagosan hányan vásároltak. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével adjunk alsó becslést annak valószínűségére, hogy $85 \leq X \leq 115$. (10 pont)

(5) Egy közvélemény-kutatásban mindenki a többiektől függetlenül $1/10$ valószínűséggel nem válaszol egy adott kérdésre. Legyen X_n a nem válaszolók száma, ha n embert kérdezünk meg. Mekkorára válasszuk a q értékét, hogy az alábbi feltétel teljesüljön:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > n/10 - q\sqrt{n}) \geq 0,8.$$

(10 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 15 pont, ennél alacsonyabb pontszám esetén pótzh-t kell írni. Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

Plusz feladat 5 pontért a zh alatt
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $i \geq 1$-re $0 < D^2(X_i) < \infty$, éa minden $1 \leq i < j$ esetén $R(X_i, X_j) = r$ (ahol r rögzített, tehát a páronkénti korrelációk mind ugyanazok). Mutassuk meg, hogy $r \geq 0$.

---

2. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. december 7.

(1) Tegyük fel, hogy egy könyvesboltban az egy nap alatt könyvet vásárlók száma (legyen ez X) Poisson-eloszlású 60 paraméterrel. Az, hogy egy vevő átlagosan hány forintot költ, legyen Y, és tegyük fel, hogy ez független X-től, és Poisson-eloszlású 3000 paraméterrel. Számítsuk ki a napi bevételnek, azaz XY-nak a szórását. (10 pont)

(2) Egy osztályba 15 lány és 13 fiú jár. A lányok közül ketten, a fiúk közül négyen balkezesek. Kiválasztanak közülük egy hatfős röplapdacsapatot úgy, hogy minden lehetséges hatfős csapatot azonos valószínűséggel választanak. Számítsuk ki a kiválasztott balkezesek és a kiválasztott fiúk számának kovarianciáját. (10 pont)

(3) Megmérjük $2n$ ember magasságát. Tegyük fel, hogy a mérési eredmények független valószínűségi változók, 170 várható értékkel és 8 szórással (centiméterben mérve). Számítsuk ki az első n mérés átlagának és az összes mérés átlagának a korrelációs együtthatóját. (10 pont)

(4) Szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után, addig, amíg három darab hatost nem kapunk. Jelölje X, hogy hány dobás szükséges ehhez. Számítsuk ki X várható értékét, és a Markov-egyenlőtlenség segítségével adjunk felső becslést annak valószínűségére, hogy $X \geq 250$. (10 pont)

(5) Egy közvélemény-kutatásban mindenki a többiektől függetlenül $1/10$ valószínűséggel nem válaszol egy adott kérdésre. Legyen X_n a nem válaszolók száma, ha n embert kérdezünk meg. Mekkorára válasszuk a q értékét, hogy az alábbi feltétel teljesüljön:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{X_n}{n} - \frac{1}{10} \right| < \frac{q}{\sqrt{n}} \right) \geq 0,8.$$

(10 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 15 pont, ennél alacsonyabb pontszám esetén pótzh-t kell írni. Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

Plusz feladat 5 pontért a zh alatt
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ olyan valószínűségi változók, hogy minden $i \geq 1$-re $0 < D^2(X_i) < \infty$, éa minden $1 \leq i < j$ esetén $R(X_i, X_j) = r$ (ahol r rögzített, tehát a páronkénti korrelációk mind ugyanazok). Mutassuk meg, hogy $r \geq 0$.

---

1. zárthelyi, valószínűségszámítás, 2017. október 19.

(1) Egy betegségben a lakosság 3%-a szenved. Az erre szolgáló vizsgálaton az egészséges emberek 2%-át tévesen betegnek diagnosztizálják, míg a betegséget 1% valószínűséggel nem veszik észre. Péter részt vesz a vizsgálaton, azt az eredményt kapja, hogy nem beteg. Mennyi a valószínűsége, hogy Péter valóban egészséges? (10 pont)

(2) Egy közlekedési társaság Siemens és CAF villamosokat üzemeltet. Tegyük fel, hogy az egy napon meghibásodó Siemens villamosok száma Poisson-eloszlású 2 várható értékkel, míg az egy napon meghibásodó CAF villamosok száma Poisson-eloszlású 1 várható értékkel, a Siemensektől függetlenül.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon összesen három villamos hibásodik meg? (3 pont)

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon összesen k darab villamos hibásodik meg? (4 pont)

(c) Mennyi az egy napon meghibásodó villamosok számának várható értéke? (3 pont)

(3) Hanna minden nap a többitől függetlenül $0,4$ valószínűséggel négyes, $0,6$ valószínűséggel hatos villamossal érkezik az egyetemre. Tegyük fel, hogy egy hónapban húsz tanítási nap van.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy hónap alatt pontosan k tanítási napon érkezik hatos villamossal? (4 pont)

(b) Feltéve, hogy az egy hónap alatt tizenötször jött négyessel és ötször hatossal, mennyi a valószínűsége, hogy a hónap utolsó három tanítási napján négyessel érkezett? (6 pont)

(4) Egy étteremben ötféle menü közül lehet választani. Egy tízfős társaságból mindenki a többiektől függetlenül $1/5$ valószínűséggel választja mindegyiket. Mennyi a valószínűsége, hogy a szakácsnak mind az ötféle ételből kell készítenie? (10 pont)

(5) Három teniszjátékos játszik mérkőzéseket. Először Anna játszik Bálinttal, majd minden mérkőzés után a kimaradó játékos a győztessel. Minden mérkőzésen a többitől függetlenül mindkét játékos $1/2$ valószínűséggel nyer. Addig játszanak, amíg valaki két mérkőzést nem nyer közvetlenül egymás után. Mennyi annak valószínűsége, hogy Anna lesz ez?

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 15 pont, ennél alacsonyabb pontszám esetén pótzh-t kell írni. Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.
A pontszámok a neptun → kurzusok → valószínűségszámítás gyakorlat → feladatok rovatában lesznek elérhetők.

Plusz feladatok 4–4 pontért

(1) Két doboz közül az elsőben k darab fehér és m darab piros, a másodikban m darab fehér és k darab piros golyó van ($k, m \geq 1$ egészek). Visszatevéssel húzunk az alábbi szabály szerint: ha a kihúzott golyó fehér, akkor a következő húzásnál az első dobozt, ha piros, akkor pedig a második dobozt használjuk. (Az első golyót az első dobozból húzzuk.) Mi annak a valószínűsége, hogy az n-edik húzásnál fehér golyót húzunk? Létezik-e ennek a mennyiségnek a határértéke, midőn $n \to \infty$? Ha igen, mi az?

(2) Legyen n pozitív páros egész. Számoljuk ki az n elem véletlen permutációjában található 2-hosszú ciklusok számának eloszlását. Mi a határeloszlás, ha $n \to \infty$?

1. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. október 19.

(1) Tízszer dobunk egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy minden szám szerepel? (10 pont)

(2) Tegyük fel, hogy egy versenyen a sportolók 10%-a doppingol. A teszt a doppingolást 80% valószínűséggel mutatja ki, viszont a doppingszert nem használók mintáját 3% valószínűséggel tévesen szabálytalannak jelzi. Feltéve, hogy egy véletlenszerűen választott sportoló mintájában doppingszer használatát mutatták ki, mennyi a valószínűsége, hogy valóban doppingolt? (10 pont)

(3) Anna és Bálint szabályos dobókockával dobnak. Anna nyer, ha a 66 sorozat előbb jelenik meg, mint a 42 sorozat (a két szám közvetlenül egymás után), különben Bálint a győztes. Mennyi a valószínűsége, hogy Anna nyeri a játékot? (10 pont)

(4) Százszor feldobunk egy szabályos dobókockát.

  (a) Mennyi 42-k számának várható értéke, vagyis várhatóan hányszor lesz négyes után kettes? (5 pont)

  (b) Mennyi a 666-ok számának várható értéke, vagyis várhatóan hányszor szerepel három hatos egymás után? (A 6666 két előfordulásnak számít.) (5 pont)

(5) Tegyük fel, hogy a metróvonalakon minden nap a többitől függetlenül p valószínűséggel van baleset. Jelölje X_p, hogy mostantól hányadik napon lesz először baleset. Számítsuk ki $\lim_{p\to 0} \mathbb{P}(p \cdot X_p < t)$ valószínűséget.

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 15 pont, ennél alacsonyabb pontszám esetén pótzh-t kell írni. Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.
A pontszámok a neptun → kurzusok → valószínűségszámítás gyakorlat → feladatok rovatában lesznek elérhetők.

Plusz feladatok 4–4 pontért

(1) Két doboz közül az elsőben k darab fehér és m darab piros, a másodikban m darab fehér és k darab piros golyó van ($k, m \geq 1$ egészek). Visszatevéssel húzunk az alábbi szabály szerint: ha a kihúzott golyó fehér, akkor a következő húzásnál az első dobozt, ha piros, akkor pedig a második dobozt használjuk. (Az első golyót az első dobozból húzzuk.) Mi annak a valószínűsége, hogy az n-edik húzásnál fehér golyót húzunk? Létezik-e ennek a mennyiségnek a határértéke, midőn $n \to \infty$? Ha igen, mi az?

(2) Legyen n pozitív páros egész. Számoljuk ki az n elem véletlen permutációjában található 2-hosszú ciklusok számának eloszlását. Mi a határeloszlás, ha $n \to \infty$?

Megoldások.

(1) Egy betegségben a lakosság 3%-a szenved. Az erre szolgáló vizsgálaton az egészséges emberek 2%-át tévesen betegnek diagnosztizálják, míg a betegséget 1% valószínűséggel nem veszik észre. Péter részt vesz a vizsgálaton, azt az eredményt kapja, hogy nem beteg. Mennyi a valószínűsége, hogy Péter valóban egészséges? (10 pont)

Legyen A az az esemény, hogy Pétert egészségesnek mutatja a vizsgálat, B_1 az az esemény, hogy Péter egészséges, míg B_2 az az esemény, hogy Péter beteg. B_1 és B_2 komplementerek, így teljes eseményrendszert alkotnak, és használható Bayes tétele:

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2)} = \frac{0,98 \cdot 0,97}{0,98 \cdot 0,97 + 0,01 \cdot 0,03} = 0,9997.$$

Tehát annak valószínűsége, hogy Péter egészséges, feltéve, hogy egészségesnek mutatja a vizsgálat, 0,9997.

(2) Egy közlekedési társaság Siemens és CAF villamosokat üzemeltet. Tegyük fel, hogy az egy napon meghibásodó Siemens villamosok száma Poisson-eloszlású 2 várható értékkel, míg az egy napon meghibásodó CAF villamosok száma Poisson-eloszlású 1 várható értékkel, a Siemensektől függetlenül.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon összesen három villamos hibásodik meg? (3 pont)
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon összesen k darab villamos hibásodik meg? (4 pont)
(c) Mennyi az egy napon meghibásodó villamosok számának várható értéke? (3 pont)

Legyen X a meghibásodott Siemens villamosok, míg Y a meghibásodott CAF villamosok száma. Legyen B_l az az esemény, hogy $Y = l$, ahol $l = 0, 1, \ldots$. Így (B_l) teljes eseményrendszer pozitív valószínűségű eseményekből, alkalmazhatjuk a teljes valószínűség tételét:

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(X + Y = k|Y = l)\mathbb{P}(Y = l) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\mathbb{P}(X = k - l, Y = l)}{\mathbb{P}(Y = l)} \cdot \mathbb{P}(Y = l).$$

Mivel X és Y függetlenek, a tört számlálója szorzattá bomlik, és lehet egyszerűsíteni. Ezután használjuk, hogy X Poisson-eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel (mert $\mathbb{E}(X) = \lambda = 2$), és Y Poisson-eloszlású $\mu = 1$ paraméterrel (hasonlóképpen). Vagyis:

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{l=0}^{k} \frac{2^{k-l}}{(k-l)!} e^{-2} \cdot \frac{1}{l!} e^{-1} = \frac{e^{-3}}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} 2^{k-l} 1^l = \frac{e^{-3}}{k!} \cdot 3^k$$

a binomiális tétel alapján. Tehát annak valószínűsége, hogy egy napon pontosan 3 villamos hibásodik meg:

$$\mathbb{P}(X + Y = 3) = \frac{e^{-3}}{6} \cdot 3^3 = 0,224.$$

Annak valószínűsége, hogy pontosan k villamos hibásodik meg:

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \frac{e^{-3}}{k!} \cdot 3^k,$$

azaz $X + Y$ Poisson-eloszlású $\lambda = 3$ paraméterrel. **Általában is:** ha X és Y független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, akkor $X + Y$ Poisson-eloszlású, a paramétere pedig az X és Y paraméterének összege.

Az összesen meghibásodó villamosok számának várható értéke:

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2 + 1 = 3.$$

(3) Hanna minden nap a többitől függetlenül $0,4$ valószínűséggel négyes, $0,6$ valószínűséggel hatos villamossal érkezik az egyetemre. Tegyük fel, hogy egy hónapban húsz tanítási nap van.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy hónap alatt pontosan k tanítási napon érkezik hatos villamossal? (4 pont)
(b) Feltéve, hogy az egy hónap alatt tizenötször jött négyessel és ötször hatossal, mennyi a valószínűsége, hogy a hónap utolsó három tanítási napján négyessel érkezett? (6 pont)

A hatos villamossal érkezések számának eloszlása (melyet jelöljünk X-szel) binomiális eloszlású $n = 20$ renddel és $p = 0,6$ paraméterrel. Tehát annak valószínűsége, hogy pontosan k napon érkezik hatos villamossal:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{20}{k} 0,6^k \cdot 0,4^{n-k}.$$

Ezután az alábbi feltételes valószínűséget kell kiszámítani:

$$\mathbb{P}(\text{utolsó három nap négyes}|X = 5) = \frac{\mathbb{P}(\{\text{utolsó három nap négyes}\} \cap \{X = 5\})}{\mathbb{P}(X = 5)}.$$

Az, hogy az utolsó három nap négyessel érkezett, és összesen ötször jött hatossal, azt jelenti, hogy az első tizenhét nap alatt ötször jött hatossal, és az utolsó három nap mindegyikén négyessel. Az első tizenhét napon a hatossal való érkezések száma binomiális eloszlású $n = 17$ renddel és $p = 0,6$ valószínűséggel. Az utolsó három nap pedig független egymástól és az első tizenhét naptól is. Így

$$\mathbb{P}(\text{utolsó három nap négyes}|X = 5) = \frac{\binom{17}{5} \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^{12} \cdot 0,4^3}{\binom{20}{5} 0,6^5 \cdot 0,4^{15}} = \frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}} = 0,399.$$

(4) Egy étteremben ötféle menü közül lehet választani. Egy tízfős társaságból mindenki a többiektől függetlenül $1/5$ valószínűséggel választja mindegyiket. Mennyi a valószínűsége, hogy a szakácsnak mind az ötféle ételből kell készítenie? (10 pont)

Legyen A_i az az esemény, hogy az i. menüt senki sem választja, és alkalmazzuk erre a szitaformulát (Poincaré-formulát):

$$\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{5} A_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = 1 - \left[\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} S_k\right] = 1 - \left[\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \binom{5}{k} \frac{(5-k)^{10}}{5^{10}}\right],$$

hiszen

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le 5} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}),$$

amely összegnek $\binom{5}{k}$ tagja van, annak valószínűsége pedig, hogy az $i_1, i_2, \ldots, i_k$ menük egyikét sem választják, $(5-k)^{10}/5^{10}$.

(5) Három teniszjátékos játszik mérkőzéseket. Először Anna játszik Bálinttal, majd minden mérkőzés után a kimaradó játékos a győztessel. Minden mérkőzésen a többitől függetlenül mindkét játékos $1/2$ valószínűséggel nyer. Addig játszanak, amíg valaki két mérkőzést nem nyer közvetlenül egymás után. Mennyi annak valószínűsége, hogy Anna lesz ez?

Az alábbi állapotokat különböztetjük meg (Anna szempontjából nézve a játékot):

- $\emptyset$: a játék kezdete, innen 1/2 valószínűséggel oda kerülünk, hogy Anna már nyert egyszer (ez lesz A), 1/2 valószínűséggel az x_A állapotba kerülünk, ami azt jelenti, hogy a legutóbbi mérkőzést valamelyik másik játékos nyerte Anna ellen.
- Az A állapotból Anna újra játszik, 1/2 valószínűséggel ő lesz a végső győztes, különben az x_A állapotba kerülünk.
- Az x_A állapotból 1/2 valószínűséggel x újra nyer, vége a játéknak, de nem Anna lett a győztes. Különben az y_x állapotba kerülünk, vagyis y nyerte a legutóbbi meccset x ellen.
- Az y_x állapot után Anna játszik y-nal 1/2 valószínűséggel y újra nyer, vége a játéknak, de nem Anna lett a győztes. Különben a következő mérkőzésen Anna nyer, és az A állapotba jutunk.

Ha most p_a jelöli annak valószínűségét, hogy az a állapotból Anna nyeri a játékot, a teljes valószínűség tétele alapján az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} p_\emptyset &= \frac{1}{2}p_A + \frac{1}{2}p_{x_A}; \\ p_A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{x_A}; \\ p_{x_A} &= \frac{1}{2}p_{y_x}; \\ p_{y_x} &= \frac{1}{2}p_A. \end{aligned}$$

Ezt megoldva $p_A = \frac{4}{7}$, $p_{x_A} = \frac{1}{7}$, és $p_\emptyset = \frac{5}{14}$ adódik. Vagyis annak valószínűsége, hogy Anna nyeri a játékot, 5/14.

(1) Tízszer dobunk egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy minden szám szerepel? (10 pont)

Legyen A_i az az esemény, hogy az i szám nem szerepel ($i = 1, \ldots, 6$), és alkalmazzuk erre a szitaformulát (Poincaré-formulát).

$$\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{6} A_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right) = 1 - \left[\sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1} S_k\right] = 1 - \left[\sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1} \binom{6}{k} \frac{(6-k)^{10}}{6^{10}}\right],$$

hiszen

$$S_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le 6} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}),$$

amely összegnek $\binom{6}{k}$ tagja van, annak valószínűsége pedig, hogy az $i_1, i_2, \ldots, i_k$ számok egyike sem szerepel, $(6-k)^{10}/6^{10}$.

(2) Tegyük fel, hogy egy versenyen a sportolók 10%-a doppingol. A teszt a doppingolást 80% valószínűséggel mutatja ki, viszont a doppingszert nem használók mintáját 3% valószínűséggel tévesen szabálytalannak jelzi. Feltéve, hogy egy véletlenszerűen választott sportoló mintájában doppingszer használatát mutatták ki, mennyi a valószínűsége, hogy valóban doppingolt? (10 pont)

Legyen A az az esemény, hogy a sportoló mintájában kimutatták a doppingszert, B_1 az az esemény, hogy doppingolt, míg B_2 az az esemény, hogy nem doppingolt. B_1 és B_2 komplementerek, így teljes eseményrendszert alkotnak, és használható Bayes tétele:

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2)} = \frac{0,8 \cdot 0,1}{0,8 \cdot 0,1 + 0,03 \cdot 0,9} = 0,748.$$

Tehát annak valószínűsége, hogy a sportoló doppingolt, feltéve, hogy ezt mutatta a vizsgálat, $0,748$.

(3) Anna és Bálint szabályos dobókockával dobnak. Anna nyer, ha a 66 sorozat előbb jelenik meg, mint a 42 sorozat (a két szám közvetlenül egymás után), különben Bálint a győztes. Mennyi a valószínűsége, hogy Anna nyeri a játékot? (10 pont)

Az alábbi állapotokat különböztetjük meg.

- 0: vagy nem volt még dobás, vagy az eddigi utolsó számjegy 1, 2, 3 vagy 5, de még nem ért véget a játék.
- 4: az eddigi utolsó dobás 4.
- 6: az eddigi utolsó dobás 6.

A 0 állapotból 1/6 valószínűséggel a 4-be, 1/6 valószínűséggel a 6-ba, különben saját magába kerülünk vissza, ekkor még nem érhetett véget a játék. A 4 állapotból a 2-es dobással Bálint nyer, a 6-os dobással a 6 állapotba kerülünk, különben a 0-ba. A 6 állapotból 6-os dobással Anna nyer, 4-es dobással a 4-be kerülünk, különben a 0-ba. Legyen p_i annak valószínűsége, hogy az i állapotból indulva Anna nyer. A teljes valószínűség tétele alapján az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{6}p_4 + \frac{1}{6}p_6 + \frac{2}{3}p_0; \\ p_4 &= \frac{1}{6}p_6 + \frac{2}{3}p_0; \\ p_6 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_4 + \frac{2}{3}p_0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva $p_0 = 3/16$ adódik, ez tehát annak valószínűsége, hogy Anna nyeri a játékot.

(4) Százszor feldobunk egy szabályos dobókockát.

(a) Mennyi 42-k számának várható értéke, vagyis várhatóan hányszor lesz négyes után kettes? (5 pont)

(b) Mennyi a 666-ok számának várható értéke, vagyis várhatóan hányszor szerepel három hatos egymás után? (A 6666 két előfordulásnak számít.) (5 pont)

Legyen $X_i = 1$, ha az i. dobás 4, és az $i+1$. dobás 2, és legyen $X_i = 0$ különben ($i = 1, 2, \ldots, 99$). Mivel $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{36}$, és $X = \sum_{i=1}^{99} X_i$ megegyezik a 42-k számával:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{99} X_i\right) = \sum_{i=1}^{99} \mathbb{E}(X_i) = \frac{99}{36} = 2,75.$$

A (b) feladat hasonlóképpen oldható meg, most X_i-t csak $i = 1, \ldots, 98$-ra definiáljuk, és az értéke akkor 1, ha az $i., i+1., i+2.$ dobások mind hatosok. Ez alapján a 666-ok számának várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{98} X_i\right) = \sum_{i=1}^{98} \mathbb{E}(X_i) = \frac{98}{6^3} = 0,45.$$

(5) Tegyük fel, hogy a metróvonalakon minden nap a többitől függetlenül p valószínűséggel van baleset. Jelölje X_p, hogy mostantól hányadik napon lesz először baleset. Számítsuk ki $\lim_{p\to 0} \mathbb{P}(p \cdot X_p < t)$ valószínűséget.

Rögzített p mellett X_p geometriai eloszlású p paraméterrel. Ezért $k = 1, 2, \ldots$ egészekre

$$\mathbb{P}(X_p = k) = (1-p)^{k-1}p \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{P}(X_p \leq k) = 1 - (1-p)^k,$$

vagy összegzéssel, vagy a következőképpen: az, hogy $X_p > k$, azt jelenti, hogy az első k nap egyikén sem volt baleset, aminek a valószínűsége $(1-p)^k$.

Ez alapján rögzített p-re és $t > 0$-ra

$$\mathbb{P}(p \cdot X_p < t) = \mathbb{P}(X_p < t/p) = \mathbb{P}(X_p \leq \lceil t/p \rceil - 1) = 1 - (1-p)^{\lceil t/p \rceil - 1}.$$

Mivel

$$(1-p)^{t/p} \leq (1-p)^{\lceil t/p \rceil - 1} \leq (1-p)^{t/p},$$

és mindkét kifejezésnek $p \to 0$ esetén e^{-t} a limesze, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{p\to 0} \mathbb{P}(p \cdot X_p < t) = 1 - e^{-t}.$$

Plusz feladatok 4–4 pontért

(1) Két doboz közül az elsőben k darab fehér és m darab piros, a másodikban m darab fehér és k darab piros golyó van ($k, m \geq 1$ egészek). Visszatevéssel húzunk az alábbi szabály szerint: ha a kihúzott golyó fehér, akkor a következő húzásnál az első dobozt, ha piros, akkor pedig a második dobozt használjuk. (Az első golyót az első dobozból húzzuk.) Mi annak a valószínűsége, hogy az n-edik húzásnál fehér golyót húzunk? Létezik-e ennek a mennyiségnek a határértéke, midőn $n \to \infty$? Ha igen, mi az?

Jelölje p_n annak valószínűségét, hogy az n. lépésben az első dobozból húzunk golyót. Tudjuk, hogy $p_1 = 1$, és a teljes valószínűség tétele alapján (arra a két eseményre, hogy az n. lépésben az első vagy a második dobozból húztunk-e) az alábbi rekurziót kapjuk:

$$p_n = \frac{k}{m+k} p_{n-1} + \frac{m}{m+k}(1 - p_{n-1}) = \frac{k-m}{m+k} p_{n-1} + \frac{m}{m+k} \qquad (n \geq 2).$$

Ebbe behelyettesítve az $n-1$-re, $n-2$-re stb. vonatkozó hasonló összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$p_n = \left(\frac{k-m}{m+k}\right)^{n-1} p_1 + \frac{m}{m+k} \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{k-m}{m+k}\right)^j.$$

A mértani sorozat összegére vonatkozó képlet alapján tehát

$$p_n = \left(\frac{k-m}{m+k}\right)^{n-1} + \frac{m}{m+k} \cdot \frac{\left(\frac{k-m}{m+k}\right)^{n-1} - 1}{\frac{k-m}{m+k} - 1}.$$

Mivel $k, m > 0$, a $(k-m)/(m+k)$ tört abszolút értéke egynél kisebb, az n. hatványaiból álló sorozat nullához tart, amiből pedig azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{m}{m+k} \cdot \frac{-1}{\frac{k-m}{m+k} - 1} = \frac{m}{m+k} \cdot \frac{-(m+k)}{-2m} = \frac{1}{2}.$$

(2) Legyen n pozitív páros egész. Számoljuk ki az n elem véletlen permutációjában található 2-hosszú ciklusok számának eloszlását. Mi a határeloszlás, ha $n \to \infty$?

Minden $1 \leq i < j \leq n$ számpárra legyen $A_{i,j}$ az az esemény, hogy az i és j elemek egy 2 hosszú ciklust alkotnak. Legyen X_n a 2 hosszú ciklusok száma az n elem véletlen permutációjában. Erre az $n(n-1)/2$ eseményre alkalmazzuk a Jordan-formulát:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{r=0}^{n(n-1)/2} (-1)^r \binom{k+r}{k} S_{k+r}.$$

Tehát S_t-t kell meghatároznunk (majd t helyére $k+r$-t helyettesítünk). A $\mathbb{P}(A_{i_1,j_1} \cap \ldots \cap A_{i_t,j_t})$ esemény valószínűsége 0, ha a felsorolt indexek között vannak azonosak, hiszen egy elem nem lehet benne két különböző cserében is. Ha a felsorolt indexek mind különbözők, ennek az eseménynek a valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A_{i_1,j_1} \cap \ldots \cap A_{i_t,j_t}) = \frac{(n-2t)!}{n!},$$

hiszen a metszettel a felsorolt $2t$ elem képét előírtuk, a többit $(n-2t)!$-féleképpen lehet permutálni, az összes (egyformán valószínű) lehetőség száma pedig $n!$. Most meg kell számolnunk, hányféleképpen lehet a különböző i_s, j_s párokat kiválasztani (a sorrend nem számít). Először válasszuk ki, hogy az n elem közül melyik $2t$ fog szerepelni, erre $\binom{n}{2t}$ lehetőség van. Ezután a legkisebb indexű elem párja $2t-1$-féle lehet. Bármit is választottunk, a még szabadok közül a legkisebb indexű párja $2t-3$-féle lehet. Ezt folytatva, a $2t$ elemet $(2t-1)(2t-3)\ldots 1 = (2t-1)!!$-féleképpen tudjuk párokba rendezni. Tehát az S_t-ben a nem nulla tagok száma $\binom{n}{2t}(2t-1)!!$.

Mindezek alapján

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - k} (-1)^r \binom{k+r}{k} \binom{n}{2(k+r)} (2(k+r)-1)(2(k+r)-3)\dots 1 \cdot \frac{(n-2(k+r))!}{n!}.$$

Egyszerűsítések után:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - k} (-1)^r \binom{k+r}{k} \frac{1}{2(k+r)\cdot(2(k+r)-2)\dots 2} \\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - k} (-1)^r \binom{k+r}{k} \frac{1}{2^{k+r}(k+r)!} \\ &\frac{1}{2^k \cdot k!} \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - k} (-1)^r \frac{1}{2^r \cdot r!}.\end{aligned}$$

Ha most rögzített k mellett n-nel végtelenhez tartunk, a $\exp(-1/2)$ Taylor-sora jelenik meg, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot e^{-1/2} \qquad (k = 0, 1, \dots).$$

Ez az $1/2$ paraméterű Poisson-eloszlás, ez lesz tehát a határeloszlás.