

Valószínűségszámítás és statisztika

Informatika BSc, esti tagozat
Backhausz Ágnes
agnes@cs.elte.hu

2016/2017. tavaszi félév

Bevezetés

Célok:

- véletlen folyamatok modellezése;
- kísérletekből, felmérésekből származó adatok elemzése;
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján;
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata;
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése.

Bevezetés

Célok:

- véletlen folyamatok modellezése;
- kísérletekből, felmérésekből származó adatok elemzése;
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján;
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata;
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése.

Alkalmazási területek:

- informatika: adatok feldolgozása, előrejelzés, sorbanállás elmélete
- élő és élettelen természettudományok, társadalomtudományok: kísérleti eredmények értelmezése;
- gazdasági folyamatok elemzése, biztosítás- és pénzügyi matematika.

Ajánlott irodalom

- Csiszár Villő: Valószínűségszámítás, jegyzet.
<http://csvillo.web.elte.hu/esti/valszam.pdf>
- Csiszár Villő: Statisztika, jegyzet.
<http://csvillo.web.elte.hu/esti/stat.pdf>
- Fazekas István: Valószínűségszámítás és statisztika.
- Arató Miklós, Prokaj Vilmos és Zempléni András: Bevezetés a valószínűség-számításba és alkalmazásaiba: példákkal, szimulációkkal
- Michael Baron: Probability and statistics for computer scientists, CRC Press, 2014.

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

- Mindkét dobás hatféle lehet: $6 \cdot 6 = 36$, vagyis 36 darab dobássorozat van.
- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek $1/36$ a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma: 6.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Tehát $\mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$.

Példa: két hatos

Négy szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két hatos lesz?

Példa: két hatos

Négy szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két hatos lesz?

- Mind a négy dobás hatféle lehet: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ dobássorozat van.
- A dobássorozatok egyformán valószínűek.
- A kedvező dobássorozatok száma: $\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

6611	6161	...	1166
6612	6162	...	1266
6621	6261	...	2166
...
6655	6565	...	5566
<hr/>			
25	25	...	25

Példa: két hatos

Négy szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két hatos lesz?

- Mind a négy dobás hatféle lehet: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ dobássorozat van.
- A dobássorozatok egyformán valószínűek.
- A kedvező dobássorozatok száma: $\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

6611	6161	...	1166
6612	6162	...	1266
6621	6261	...	2166
...
6655	6565	...	5566
<hr/>			
25	25	...	25

A hatosokat $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen helyezhetjük el, a maradék két dobás pedig $5 \cdot 5 = 25$ -féle lehet. A válasz $150/1296 = 0,116$.

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy 8 bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes 0–1 sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 darab 1-es lesz benne?

11100000, 11010000, 11001000, ..., 10100100, 10100010, ..., 00000111

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy 8 bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes 0–1 sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 darab 1-es lesz benne?

11100000, 11010000, 11001000, ..., 10100100, 10100010, ..., 00000111

- Mind a 8 bit kétféle lehet: $2^8 = 256$ lehetséges bitsorozat van.
- A sorozatok egyformán valószínűk.

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy 8 bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes 0–1 sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 darab 1-es lesz benne?

11100000, 11010000, 11001000, ..., 10100100, 10100010, ..., 00000111

- Mind a 8 bit kétféle lehet: $2^8 = 256$ lehetséges bitsorozat van.
- A sorozatok egyformán valószínűek.
- A kedvező bitsorozatok száma: $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$, hiszen ennyiféleképpen választhatjuk ki a három darab egyes helyét a 8 lehetőségből.
- Tehát:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan 3 darab egyes lesz benne}) = \binom{8}{3} \frac{1}{2^8} = \frac{56}{256} = 0,219.$$

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy n bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes 0–1 sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab 1-es lesz benne?

11100000, 11010000, 11001000, ..., 10100100, 10100010, ..., 00000111

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy n bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes 0–1 sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab 1-es lesz benne?

11100000, 11010000, 11001000, ..., 10100100, 10100010, ..., 00000111

- Mind az n bit kétféle lehet: 2^n lehetséges bitsorozat van.
- A sorozatok egyformán valószínűk.

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy n bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes 0–1 sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab 1-es lesz benne?

11100000, 11010000, 11001000, ..., 10100100, 10100010, ..., 00000111

- Mind az n bit kétféle lehet: 2^n lehetséges bitsorozat van.
- A sorozatok egyformán valószínűek.
- A kedvező bitsorozatok száma: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, hiszen ennyiféleképpen választhatjuk ki a k darab egyes helyét az n lehetőségből.
- Tehát:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ darab egyes lesz benne}) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy n bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes 0–1 sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab 1-es lesz benne?

11100000, 11010000, 11001000, ..., 10100100, 10100010, ..., 00000111

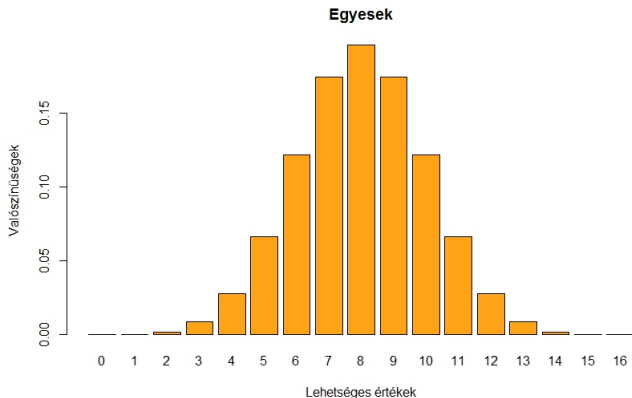
- Mind az n bit kétféle lehet: 2^n lehetséges bitsorozat van.
- A sorozatok egyformán valószínűek.
- A kedvező bitsorozatok száma: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, hiszen ennyiféleképpen választhatjuk ki a k darab egyes helyét az n lehetőségből.
- Tehát:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ darab egyes lesz benne}) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

Binomiális eloszlás: $k = 0, 1, \dots, n$, $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Példa: 16 hosszú véletlen bitsorozat

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ darab egyes lesz benne}) = \binom{16}{k} \frac{1}{2^{16}}.$$



1. ábra. Az egyesek számának eloszlása

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 balkezes és 25 jobbkezes gyerek van. Tornaórán véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két balkezes gyerek van?

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 balkezes és 25 jobbkezes gyerek van. Tornaórán véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két balkezes gyerek van?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két balkezes}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 0,319.$$

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 balkezes és 25 jobbkezes gyerek van. Tornaórán véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két balkezes gyerek van?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két balkezes}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 0,319.$$

Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér. **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva). Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

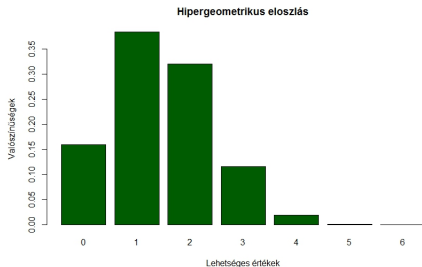
$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

A kihúzott fekete golyók száma **hipergeometrikus eloszlású**.

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

8 balkezes, 25 jobbkezes, hatfős csapatot választanak.

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ balkezes}) = \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{25}{6-k}}{\binom{33}{6}}.$$



2. ábra. A balkezes csapattagok számának eloszlása

Példa: geometriai valószínűség

Egy $R = 30$ cm sugarú céltáblára lövünk. Feltételezzük, hogy a lövedék biztosan eltalálja a céltáblát, és a lövés helye véletlenszerűen, egyenletesen helyezkedik el.

A céltábla középső $r = 5$ cm sugarú körlemeze 10 pontot ér. Mennyi a valószínűsége, hogy sikerül 10 pontot elérni?

Példa: geometriai valószínűség

Egy $R = 30$ cm sugarú céltáblára lövünk. Feltételezzük, hogy a lövedék biztosan eltalálja a céltáblát, és a lövés helye véletlenszerűen, egyenletesen helyezkedik el.

A céltábla középső $r = 5$ cm sugarú körlemeze 10 pontot ér. Mennyi a valószínűsége, hogy sikerül 10 pontot elérni?

$$\mathbb{P}(A) = \frac{A \text{ területe}}{\Omega \text{ területe}} = \frac{r^2\pi}{R^2\pi} = \frac{1}{36}.$$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Definíció

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *hármás* **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- Ω nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, azaz minden $A \in \mathcal{A}$ -ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
 - (i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
 - (ii) ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok \mathcal{A} -beli elem uniója is \mathcal{A} -beli);
 - (iii) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz \mathcal{A} -beli halmazok komplementere is \mathcal{A} -beli).
- $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ függvény, melyre
 - (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
 - (ii) ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$ -re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- Ω : eseménytér vagy elemi események halmaza.
- Ω elemei ($\omega \in \Omega$): elemi események.
- \mathcal{A} : események halmaza (vagy események σ -algebrája).
- \mathcal{A} elemei ($A \in \mathcal{A}$): események.
- \mathbb{P} : valószínűség (probability).
- Ω esemény neve: biztos esemény.
- \emptyset (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény.
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ kizáró események, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz nincs olyan $\omega \in A$, melyre $\omega \in B$ is teljesül.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ olyan mértéktér, ahol $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ teljesül, \mathbb{P} pedig egy mérték.

Példa: Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 30\}$, \mathcal{A} az Ω megfelelő részhalmazai, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5\}$, és $\mathbb{P}(A) = 1/36$.

- $\Omega = \{8 \text{ hosszú bitsorozatok}\}$, $\mathcal{A} = \Omega$ összes részhalmaza, $\mathbb{P}(\omega) = 1/256$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre/bitsorozatra.

A esemény: pontosan 3 egyest kapunk, ekkor $\mathbb{P}(A) = 56/256 = 0,219$.

- $\Omega = \{\text{hatfős csapatok}\}$, $\mathcal{A} = \Omega$ összes részhalmaza, $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\binom{33}{6}}$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre.

A esemény: pontosan két balkezes kerül a csapatba; $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 0,319$.

Példa: Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 30\}$, \mathcal{A} az Ω megfelelő részhalmazai, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5\}$, és $\mathbb{P}(A) = 1/36$.

- $\Omega = \{8 \text{ hosszú bitsorozatok}\}$, $\mathcal{A} = \Omega$ összes részhalmaza, $\mathbb{P}(\omega) = 1/256$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre/bitsorozatra.

A esemény: pontosan 3 egyest kapunk, ekkor $\mathbb{P}(A) = 56/256 = 0,219$.

- $\Omega = \{\text{hatfős csapatok}\}$, $\mathcal{A} = \Omega$ összes részhalmaza, $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\binom{33}{6}}$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre.

A esemény: pontosan két balkezes kerül a csapatba; $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 0,319$.

Az utóbbi két eset **klasszikus valószínűségi mező**: minden elemi esemény egyformán valószínű.

A valószínűségek kombinatorikai kiszámítási módja

Tegyük fel, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőre az alábbiak teljesülnek (**klasszikus valószínűségi mező**):

- Ω véges sok elemből áll: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.
- \mathcal{A} az Ω összes részhalmazából áll.
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$ minden $\omega \in \Omega$ -ra, azaz az elemi események valószínűsége egyenlő.

A valószínűségek kombinatorikai kiszámítási módja

Tegyük fel, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőre az alábbiak teljesülnek (**klasszikus valószínűségi mező**):

- Ω véges sok elemből áll: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.
- \mathcal{A} az Ω összes részhalmazából áll.
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$ minden $\omega \in \Omega$ -ra, azaz az elemi események valószínűsége egyenlő.

Ilyenkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{A \text{ elemeinek száma}}{\Omega \text{ elemeinek száma}} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Példa: két kockadobás, véletlen bitsorozat, visszatevés nélküli mintavétel.

A valószínűség elemi tulajdonságai

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

Definíció

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események.

- *Unió:* $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ vagy } \omega \in B\}$.
- *Metszet:* $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ és } \omega \in B\}$.
- *Komplementer/ellentett esemény:* $\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$.
- *Különbség:* $B \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \in B \text{ és } \omega \notin A\}$.
- *A maga után vonja B-t, ha minden $\omega \in A$ -ra $\omega \in B$ is teljesül. Jelölés:* $A \subseteq B$.

A valószínűség elemi tulajdonságai

Állítás (Komplementer valószínűsége)

Ha $A \in \mathcal{A}$ esemény, akkor $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Állítás (Különbség valószínűsége)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

A valószínűség elemi tulajdonságai

Állítás (Komplementer valószínűsége)

Ha $A \in \mathcal{A}$ esemény, akkor $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Állítás (Különbség valószínűsége)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

Állítás (Tartalmazás)

Ha az $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

A valószínűség elemi tulajdonságai

Állítás (Komplementer valószínűsége)

Ha $A \in \mathcal{A}$ esemény, akkor $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Állítás (Különbség valószínűsége)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

Állítás (Tartalmazás)

Ha az $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Állítás (Szitaformula)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Szitaformulák

Állítás

Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ eseményekre teljesül, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ & - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Szitaformulák

Állítás

Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ eseményekre teljesül, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ &\quad - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Legyenek A_1, \dots, A_k tetszőleges események. Ekkor az események uniójának valószínűségét a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) &= \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \\ &\quad - \dots + (-1)^{k+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \\ &= \sum_{t=1}^k (-1)^{t+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_t}).\end{aligned}$$

Valószínűségi változó

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény valószínűségi változó, ha tetszőleges $a < b$ valós számokra

$$\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}.$$

Valószínűségi változó

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény valószínűségi változó, ha tetszőleges $a < b$ valós számokra

$$\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}.$$

Példa. Valakinek három gyereke születik. Legyen X a fiúk száma. Ekkor

$$\Omega = \{FFF, FFL, FLF, FLL, LFF, LFL, LLF, LLL\};$$

$$X(LLL) = 0; \quad X(LLF) = X(LFL) = X(FLL) = 1;$$

$$X(FFL) = X(FLF) = X(LFF) = 2; \quad X(FFF) = 3.$$

Ekkor $\mathbb{P}(X = 0) = 1/8, \mathbb{P}(X = 1) = 3/8, \mathbb{P}(X = 2) = 3/8, \mathbb{P}(X = 3) = 1/8$.

Példa: a dobott számok összege

Két szabályos dobókockával dobunk. Ekkor Ω :

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Legyen $Y : \Omega \rightarrow R$ a dobott számok összege:

$$Y(11) = 2, Y(12) = Y(21) = 3, \dots,$$

$$Y(61) = Y(52) = \dots = Y(16) = 7, \dots, Y(66) = 12.$$

Példa: a dobott számok összege

Két szabályos dobókockával dobunk. Ekkor Ω :

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Legyen $Y : \Omega \rightarrow R$ a dobott számok összege:

$$Y(11) = 2, Y(12) = Y(21) = 3, \dots,$$

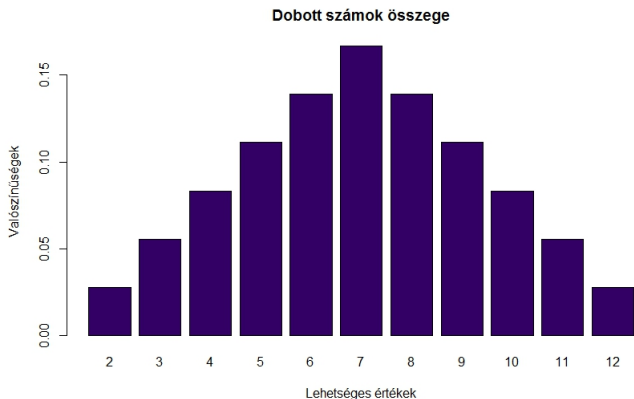
$$Y(61) = Y(52) = \dots = Y(16) = 7, \dots, Y(66) = 12.$$

Ekkor

$$\mathbb{P}(Y = 2) = 1/36, \mathbb{P}(Y = 3) = 2/36, \dots, \mathbb{P}(Y = 7) = 1/6, \dots, \mathbb{P}(Y = 12) = 1/36.$$

Példa: a dobott számok összege

Két szabályos dobókockával dobunk. A dobott számok összegének eloszlása:



3. ábra. Két kockadobás összegének eloszlása

Diszkrét valószínűségi változó eloszlása

Definíció (Diszkrét valószínűségi változó)

Az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó diszkrét, ha véges sok vagy megszámlálható sok értéket vesz fel.

Definíció (Eloszlás)

Legyenek az X valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$, és legyen

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Ekkor az $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$ sorozat az X valószínűségi változó eloszlása.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlása

Példa: három gyerek. Az előző példában: háromszor gyerek születik, X a fiúk száma, mind a $2^3 = 8$ lehetőség egyformán valószínű.

Ekkor X lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3.

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1/8; \quad \mathbb{P}(X = 1) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 2) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/8.$$

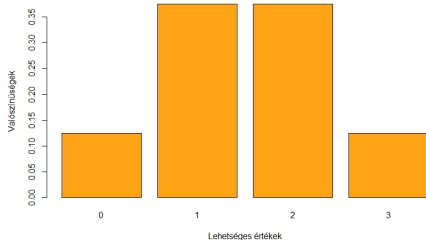
Mindezek alapján X eloszlása az alábbi sorozat:

$$(0, 1/8), \quad (1, 3/8), \quad (2, 3/8), \quad (3, 1/8).$$

Példa: szabályos kockadobás. Egyszer dobunk szabályos dobókockával, jelölje Y a dobott számot. Ekkor Y eloszlása:

$$(1, 1/6), \quad (2, 1/6), \quad (3, 1/6), \quad (4, 1/6), \quad (5, 1/6), \quad (6, 1/6).$$

Példa: a gyerekek számának eloszlása.



4. ábra.

A fiúk számának lehetséges értékei a három gyerek közül és a hozzájuk tartozó valószínűségek

Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$. Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad \text{ha } \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$. Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad \text{ha } \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Példa: három gyerek. Legyen X a fiúk száma a három gyerek közül. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Példa: szabályos kockadobás. Legyen Y egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Definíció (Szórásnégyzet)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right).$$

Definíció (Szórás)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)}.$$

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Definíció (Szórásnégyzet)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right).$$

Definíció (Szórás)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)}.$$

Állítás (A szórás kiszámítása egész értékek esetén)

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik, és melynek lehetséges értékei nemnegatív egészek. Ekkor

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) \right]^2.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Legyen továbbra is X a fiúk száma három gyerek közül:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1/8; \quad \mathbb{P}(X = 1) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 2) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/8.$$

Diszkrét esetben így számolhatunk:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^3 k^2 \mathbb{P}(X = k) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3.$$

Ebből és a korábbi számolásból

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 3 - 1,5^2 = 3 - 2,25 = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Végül pedig a fiúk számának szórása:

$$D(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866.$$

A kockadobás szórása: $D(Y) = 1,7078$.

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Az A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Az A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Példa: Gábornak három gyereke van. Feltéve, hogy pontosan egy fia van, mennyi a valószínűsége, hogy a középső gyermeke fiú?

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Az A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Példa: Gábornak három gyereke van. Feltéve, hogy pontosan egy fia van, mennyi a valószínűsége, hogy a középső gyermeke fiú?

A : a középső gyerek fiú; B : pontosan egy fiú van.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{a középső fiú}) = \frac{1}{2}.$$

A $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget így számolhatjuk ki:

$$\mathbb{P}(\text{a középső fiú} | \text{egy fiú van}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(LFL)}{\mathbb{P}(FLL, LFL, LLF)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = 1/3.$$

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ (véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha

- (i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$;
- (ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ teljesül minden $1 \leq i < j$ -re;
- (iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ minden $i = 1, 2, \dots$ -re.

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ (véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha

- (i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$;
- (ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ teljesül minden $1 \leq i < j$ -re;
- (iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ minden $i = 1, 2, \dots$ -re.

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, B_1, B_2, \dots pedig teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Bayes-tétel

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, B_1, B_2, \dots pedig teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Tétel (Bayes-tétel)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(A) > 0$, B_1, B_2, \dots pedig teljes eseményrendszer. Ekkor minden $k = 1, 2, \dots$ -ra teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

Függetlenség

Definíció

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Ha $A, B \in \mathcal{A}$ események, és $\mathbb{P}(B) > 0$: A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Függetlenség

Definíció

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Ha $A, B \in \mathcal{A}$ események, és $\mathbb{P}(B) > 0$: A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Példa. Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel.

A : a piros kockával hármast dobunk.

B : a kék kockával ötöt dobunk.

C : a dobott számok összege 6.

Függetlenség

Definíció

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Ha $A, B \in \mathcal{A}$ események, és $\mathbb{P}(B) > 0$: A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Példa. Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel.

A : a piros kockával hármat dobunk.

B : a kék kockával ötöt dobunk.

C : a dobott számok összege 6.

A és B függetlenek.

A és C nem függetlenek, illetve B és C sem függetlenek.

Függetlenség

Definíció (Függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ véges sok esemény (teljesen) **függetlenek**, ha minden $1 \leq k \leq n$ -re és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ -re

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Az $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ megszámlálhatóan végtelen sok esemény (teljesen) független, ha minden $k \in \mathbb{N}$ -re és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$ -ra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Páronkénti függetlenség

Ha az A_1, A_2, \dots, A_n események függetlenek, akkor páronként függetlenek. De: a páronkénti függetlenségből nem következik a függetlenség.

Példa. Szabályos dobókockával kétszer dobunk. Legyen

A : az első dobás páros. B : a második dobás páros. C : a két dobás összege páros.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2.$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/4.$$

Ugyanakkor, ha az első és a második dobás páros, akkor a két dobás összege is biztosan páros, így

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Tehát: A, B, C páronként függetlenek, de nem függetlenek.

Függetlenség

Definíció (Véges eset)

Azt mondjuk, hogy az $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq t_2) \dots \mathbb{P}(X_n \leq t_n)$$

teljesül tetszőleges t_1, t_2, \dots, t_n valós számokra.

Definíció (Végtelen eset)

Az $X_1, X_2, X_3 \dots$ valószínűségi változók függetlenek, ha közülük bármely véges sokat kiválasztva független valószínűségi változókat kapunk.

Állítás (Egész értékű eset)

Az $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = \mathbb{P}(X_1 = k_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = k_2) \dots \mathbb{P}(X_n = k_n)$$

teljesül tetszőleges k_1, k_2, \dots, k_n egész számokra.

Függetlenség

Független valószínűségi változókra példa:

- Két kockadobásnál az elsőként (X_1) és másodikként dobott szám (X_2).
- A holtapi csapadékmennyiség Budapesten és Torontóban.
- Két találomra választott ember testmagassága.

Nem független valószínűségi változókra példa:

- Két kockadobásnál az első szám és a két dobott szám összege.
- A holtapi csapadékmennyiség Budapesten és Budaörsön.
- Két testvér testmagassága.

Binomiális eloszlás

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Binomiális eloszlás

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Definíció

Az X valószínűségi változó **binomiális eloszlású** n renddel és p paraméterrel, ha lehetséges értékei:

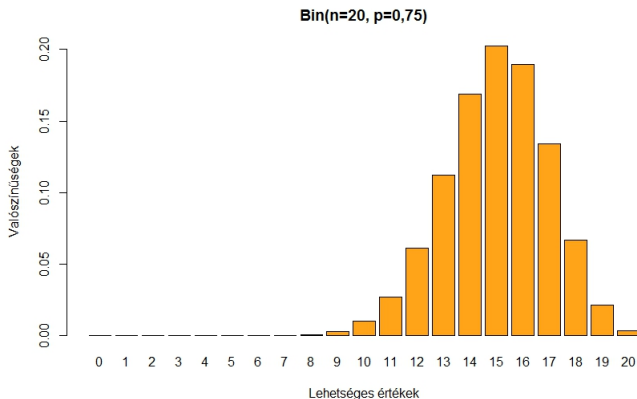
$$0, 1, 2, \dots, n,$$

és minden $0 \leq k \leq n$ egészre

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

($n \geq 1$ egész, $0 < p < 1$.) Jelölés: $\text{Bin}(n, p)$.

Példa: binomiális eloszlás



5. ábra. Binomiális eloszlás, $n = 20$, $p = 0,75$.

Példa: binomiális eloszlás

- Egy 8 hosszú véletlen bitsorozatban az egyesek száma binomiális eloszlású $n = 8$ renddel és $p = 1/2$ paraméterrel (függetlenséget feltételezve).

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ egyes van}) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{8}{k} 0,5^k 0,5^{8-k} = \binom{8}{k} \frac{1}{2^8}.$$

Például

$$\mathbb{P}(\text{pontosan 3 egyes van}) = \mathbb{P}(X = 3) = \binom{8}{3} 0,5^3 0,5^5 = \frac{56}{256} = 0,219.$$

- Visszatevéses mintavételnél a húzott fekete golyók száma (N golyó, ebből M fekete, n -szer húzunk visszatevéssel) binomiális eloszlású n renddel és $p = M/N$ paraméterrel:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k (N - M)^{n-k}}{N^n}.$$

A binomiális eloszlás tulajdonságai

Állítás

Legyen X binomiális eloszlású valószínűségi változó n renddel és p paraméterrel.

(a) Az $X \sim \text{Bin}(n, p)$ binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

(b) Az $X \sim \text{Bin}(n, p)$ binomiális eloszlású valószínűségi változó szórása:

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

(c) Az a k érték, melyre $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ maximális (vagyis X módusza): $[(n+1)p]$, ahol $[\cdot]$ az egész részt jelöli. Ha $(n+1)p$ egész, akkor az eggyel kisebb k is maximális értéket ad.

Példa: $X \sim \text{Bin}(8, 1/2)$ az egyesek száma. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = 8 \cdot 1/2 = 4; \quad D(X) = \sqrt{8 \cdot 1/2 \cdot 1/2} = \sqrt{2} = 1,414.$$

Poisson-eloszlás

Definíció

Legyen $\lambda > 0$. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó λ paraméterű Poisson-eloszlású, ha lehetséges értékei $k = 0, 1, 2, \dots$, a hozzájuk tartozó valószínűségek pedig:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Állítás (A Poisson-eloszlás tulajdonságai)

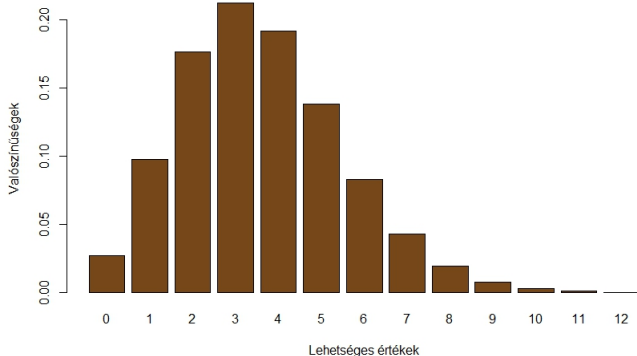
Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel.

(a) Ekkor X várható értéke, szórása és szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \quad D(X) = \sqrt{\lambda}; \quad D^2(X) = \lambda.$$

(b) A $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség $k = [\lambda]$ esetén maximális. Ha λ egész, az eggyel kisebb k is a legnagyobb értéket adja.

Példa: Poisson-eloszlás



6. ábra. Poisson-eloszlás, $\lambda = 3,61$, $k = 12$ -ig.

A Poisson-eloszlás és a binomiális eloszlás kapcsolata

A Poisson-eloszlást általában akkor használják, ha sok független, kis valószínűséggel bekövetkező eseménynél a bekövetkező események számát kell tekinteni. Például:

- a sajtóhibák száma egy könyvben;
- egy biztosító 15000 ügyfele által összesen okozott balesetek száma;
- nagyobb tüzesetek száma egy adott időszakban.

Legyen $\lambda > 0$ pozitív szám, és $p_n = \lambda/n$ minden $n = 1, 2, \dots$ egészre. Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, Y_n eloszlása pedig $\text{Bin}(n, p_n)$. Ekkor tetszőleges $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(X = k),$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A Poisson-eloszlás és a binomiális eloszlás kapcsolata

Legyen $\lambda > 0$ pozitív szám, és $p_n = \lambda/n$ minden $n = 1, 2, \dots$ egészre. Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, Y_n eloszlása pedig $\text{Bin}(n, p_n)$. Ekkor tetszőleges $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(X = k),$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

- X Poisson-eloszlású $\lambda = 3,61$ paraméterrel;
- Y binomiális eloszlás $n = 92$ renddel és $p = 0,0392$ paraméterrel;
- vegyük észre, hogy $\mathbb{E}(X) = \lambda = 3,61 = n \cdot p = \mathbb{E}(Y)$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X = k)$	0,027	0,098	0,176	0,212	0,191	0,138	0,083	0,042
$\mathbb{P}(Y = k)$	0,025	0,094	0,176	0,215	0,195	0,14	0,083	0,043

Geometriai eloszlás

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Y : hányadik kísérlet az első sikeres.

Geometriai eloszlás

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Y : hányadik kísérlet az első sikeres.

Definíció

Az Y valószínűségi változó **geometriai eloszlású** p paraméterrel, ha lehetséges értékei:

$$1, 2, 3 \dots$$

és minden $1 \leq k$ egészre

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

($0 < p < 1$.) Jelölés: $\text{Geo}(p)$. Másik elnevezés: Pascal-eloszlás.

A geometriai eloszlás tulajdonságai

Példa: egy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után. Jelölje Y , hogy hányadik dobásnál kapjuk az első hatost. Ekkor Y geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel. Y lehetséges értékei $k = 1, 2, \dots$, és

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

A geometriai eloszlás tulajdonságai

Példa: egy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után. Jelölje Y , hogy hányadik dobásnál kapjuk az első hatost. Ekkor Y geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel. Y lehetséges értékei $k = 1, 2, \dots$, és

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Állítás

Legyen Y geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel.

(a)

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}; \quad D(Y) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

(b) A $\mathbb{P}(Y = k)$ valószínűség $k = 1$ -re maximális.

A geometriai eloszlás tulajdonságai

Példa: egy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után. Jelölje Y , hogy hányadik dobásnál kapjuk az első hatost. Ekkor Y geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel. Y lehetséges értékei $k = 1, 2, \dots$, és

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Állítás

Legyen Y geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel.

(a)

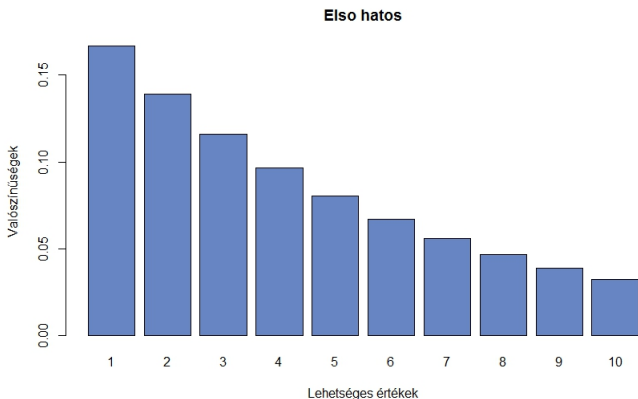
$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}; \quad D(Y) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

(b) A $\mathbb{P}(Y = k)$ valószínűség $k = 1$ -re maximális.

A példában szereplő Y várható értéke és szórása:

$$\mathbb{E}(Y) = 6; \quad D(Y) = \sqrt{\frac{5/6}{1/36}} = \sqrt{30} = 5,477.$$

Példa: geometriai eloszlás



7. ábra. Az első hatos eloszlása: geometriai eloszlás, $p = 1/6$, $k = 10$ -ig.

Negatív binomiális eloszlás

Definíció

A Z valószínűségi változó **negatív binomiális eloszlású** p paraméterrel, ha

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r \quad (k = r, r+1, \dots).$$

Példa: független p valószínűségű kísérletek esetén hányadik kísérlet lesz az r . sikeres. ($r \geq 1$ egész, $0 < p < 1$.)

Állítás (A negatív binomiális eloszlás tulajdonságai)

Legyen Z negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel. Ekkor

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{r}{p}; \quad D(Z) = \sqrt{r \frac{1-p}{p^2}}.$$

$r = 1$ -re a geometriai eloszlást kapjuk.

Hipergeometrikus eloszlás

Definíció

Legyenek N, M, n pozitív egészek úgy, hogy $1 \leq n \leq M \leq N$. Az X valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Hipergeometrikus eloszlás

Definíció

Legyenek N, M, n pozitív egészek úgy, hogy $1 \leq n \leq M \leq N$. Az X valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású**, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Példa: visszatevés nélküli mintavételnél a húzott fekete golyók száma.

Lottósorsolásnál a találatok száma (X) hipergeometrikus eloszlású $N = 90$, $M = 5$, $n = 5$ paraméterekkel:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

A hipergeometrikus eloszlás tulajdonságai

Állítás

Legyen az X valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású N , M és n paraméterekkel.

(a) Az X valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{M}{N}.$$

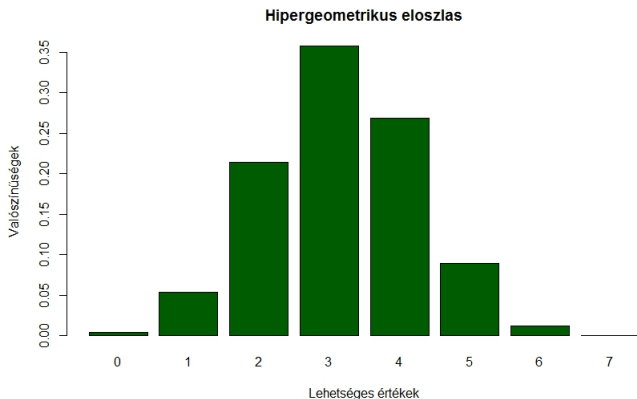
(b) Az X valószínűségi változó szórása:

$$D(X) = \sqrt{n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}.$$

Példa. Az ötöslottón a találatok számának várható értéke és szórása:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{25}{90} = 0,2778; \quad D(X) = 0,5006.$$

Példa: a hipergeometrikus eloszlás



8. ábra. Hipergeometrikus eloszlás, $N = 20$, $M = 9$, $n = 7$.

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor X eloszlásfüggvénye az alábbi $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ valós számra.}$$

Állítás

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, és F az X eloszlásfüggvénye, akkor

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor X eloszlásfüggvénye az alábbi $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ valós számra.}$$

Állítás

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, és F az X eloszlásfüggvénye, akkor

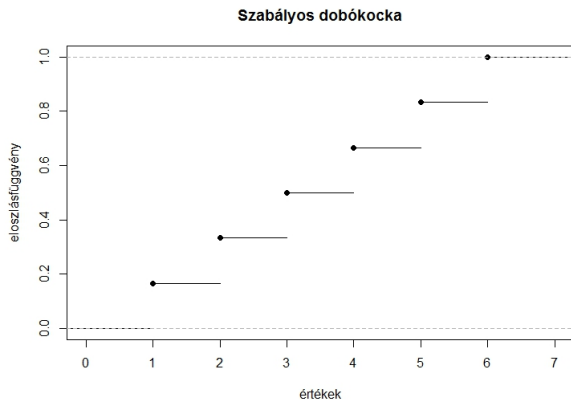
$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Állítás (Az eloszlásfüggvény tulajdonságai)

Legyen X valószínűségi változó, F pedig az eloszlásfüggvénye. Ekkor

- (i) F monoton növekvő: $a < b$ esetén $F(a) \leq F(b)$.
- (ii) $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$.
- (iii) F jobbról folytonos, azaz minden $t \in \mathbb{R}$ valós számra $\lim_{s \rightarrow t^-} F(s) = F(t)$.

Példa: eloszlásfüggvény



9. ábra. Szabályos dobókockával dobott szám eloszlásfüggvénye.

Abszolút folytonos valószínűségi változó

Definíció (Abszolút folytonosság és sűrűségfüggvény)

Az X valószínűségi változó **abszolút folytonos**, ha van olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra. Ilyenkor az f függvényt az X valószínűségi változó **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Abszolút folytonos valószínűségi változó

Definíció (Abszolút folytonosság és sűrűségfüggvény)

Az X valószínűségi változó **abszolút folytonos**, ha van olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra. Ilyenkor az f függvényt az X valószínűségi változó **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Állítás

Legyen az X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f . Ekkor tetszőleges $a < b$ számokra teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(s) ds.$$

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Állítás (Az eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény kapcsolata)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek F az eloszlásfüggvénye.

(a) Ha f az X sűrűségfüggvénye, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ számra

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds.$$

(b) Az $f(t) = F'(t)$ függvény (azokra a t -kre, ahol F differenciálható) az X sűrűségfüggvénye.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Állítás (Az eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény kapcsolata)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek F az eloszlásfüggvénye.

(a) Ha f az X sűrűségfüggvénye, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ számra

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds.$$

(b) Az $f(t) = F'(t)$ függvény (azokra a t -kre, ahol F differenciálható) az X sűrűségfüggvénye.

Állítás (A sűrűségfüggvény jellemzése)

Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor sűrűségfüggvénye valamilyen valószínűségi változónak, ha

(i) $f(s) \geq 0$ teljesül “majdnem minden” $s \in \mathbb{R}$ -re (például véges vagy megszámlálható sok kivétel lehetséges).

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 1$.

Várható érték és szórás

Definíció (Várható érték, abszolút folytonos eset)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f .
Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds,$$

ha ez az integrál létezik és véges.

Várható érték és szórás

Definíció (Várható érték, abszolút folytonos eset)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f . Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds,$$

ha ez az integrál létezik és véges.

Definíció (Szórásnégyzet és szórás)

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye f . Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2],$$

szórása pedig

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]},$$

ha ezek a várható értékek léteznek.

Szórásnégyzet és szórás

Definíció (Szórásnégyzet és szórás)

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye f . Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2],$$

szórása pedig

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]},$$

ha ezek a várható értékek léteznek.

Állítás (A szórásnégyzet kiszámítása)

A szórásnégyzetet a következőképpen számíthatjuk ki abszolút folytonos X valószínűségi változó esetén:

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 f(s) ds - \left[\int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds \right]^2,$$

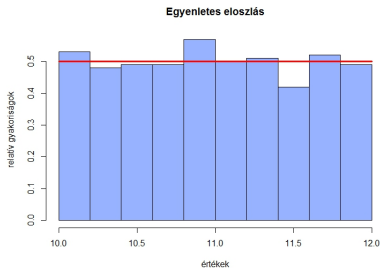
ahol f az X sűrűségfüggvénye.

Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Legyenek $a < b$ valós számok. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



10. ábra. $U(10, 12)$ sűrűségfüggvény és 500 elemű minta hisztogramja.

Egyenletes eloszlás

Állítás (Az egyenletes eloszlás tulajdonságai)

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor a következők teljesülnek.

(i) X eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq a; \\ \frac{t-a}{b-a}, & \text{ha } a < t < b; \\ 1, & \text{ha } t \geq b. \end{cases}$$

(ii) Ha $a \leq c \leq d \leq b$, akkor

$$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(s) ds = \int_c^d \frac{1}{b-a} ds = \frac{d-c}{b-a}.$$

(iii) Az X valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Példa: egyenletes eloszlás

Példa. Csomagot várunk, a futár 10 és 12 óra között érkezik. Feltesszük, hogy érkezésének időpontja egyenletes eloszlású a $[10, 12]$ intervallumon. Ekkor az előző állítás alapján az alábbiak igazak ($a = 10, b = 12$).

- Annak valószínűsége, hogy 10 és 11 óra között érkezik: $(11 - 10)/(12 - 10) = 1/2$.
- Annak valószínűsége, hogy 10:15 és 10:30 között érkezik, $1/8 = 0,125$.
- Érkezési időpontjának várható értéke: $(10 + 12)/2 = 11$ óra.
- Érkezési időpontjának szórása: $(12 - 10)/\sqrt{12} = 1/\sqrt{3} = 0,5774$.

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Legyen m valós, σ pedig pozitív szám. Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó **normális eloszlású** m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Jelölése: $Y \sim N(m, \sigma^2)$.

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Legyen m valós, σ pedig pozitív szám. Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó **normális eloszlású** m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

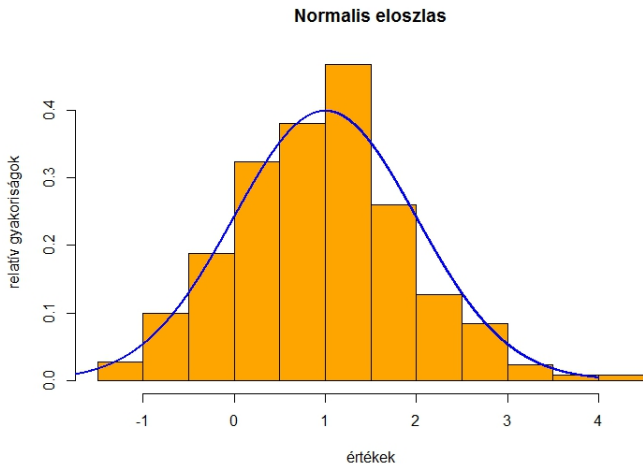
Jelölése: $Y \sim N(m, \sigma^2)$.

Ha $Y \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}(Y) = m$, $D(Y) = \sigma$.

Standard normális eloszlás: $m = 0$ várható értékű és $\sigma = 1$ szórással rendelkező normális eloszlás. Eloszlásfüggvénye: Φ , sűrűségfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Normális eloszlás



11. ábra.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye és 500 elemű minta hisztogramja

A normális eloszlás tulajdonságai

Tegyük fel, hogy Y normális eloszlású m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számokra

- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds.$
- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(Y < b) = \mathbb{P}(Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(a < Y) = \mathbb{P}(a \leq Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = 1 - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$

A normális eloszlás tulajdonságai

Tegyük fel, hogy Y normális eloszlású m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számokra

- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_a^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds.$
- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(Y < b) = \mathbb{P}(Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(a < Y) = \mathbb{P}(a \leq Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = 1 - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$
- Az $aY + b$ valószínűségi változó normális eloszlású $am + b$ várható értékkel és $a^2\sigma^2$ szórásnégyzettel.
- Ha Y_1, Y_2 független normális eloszlású valószínűségi változók, akkor $Y_1 + Y_2$ is normális eloszlású, várható értéke $m_1 + m_2$, szórásnégyzete $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ (ahol $Y_j \sim N(m_j, \sigma_j^2)$).

Példa: normális eloszlás

Példa. Tegyük fel, hogy az Y valószínűségi változó normális eloszlású $m = 4$ várható értékkel és $\sigma = 3$ szórással. Ekkor

$$\mathbb{P}(Y \leq 7) = \Phi\left(\frac{7 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{7 - 4}{3}\right) = \Phi(1) = 0,84.$$

Példa: normális eloszlás

Példa. Tegyük fel, hogy az Y valószínűségi változó normális eloszlású $m = 4$ várható értékkel és $\sigma = 3$ szórással. Ekkor

$$\mathbb{P}(Y \leq 7) = \Phi\left(\frac{7 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{7 - 4}{3}\right) = \Phi(1) = 0,84.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 < Y \leq 7) &= \mathbb{P}(Y \leq 7) - \mathbb{P}(Y \leq 1) = \Phi\left(\frac{7 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1 - m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{7 - 4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1 - 4}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0,68.\end{aligned}$$

Példa: normális eloszlás

Példa. Tegyük fel, hogy az Y valószínűségi változó normális eloszlású $m = 4$ várható értékkel és $\sigma = 3$ szórással. Ekkor

$$\mathbb{P}(Y \leq 7) = \Phi\left(\frac{7-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{7-4}{3}\right) = \Phi(1) = 0,84.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 < Y \leq 7) &= \mathbb{P}(Y \leq 7) - \mathbb{P}(Y \leq 1) = \Phi\left(\frac{7-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1-m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{7-4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-4}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0,68.\end{aligned}$$

Példa. Ha Y és Z függetlenek, normális eloszlásúak, $Y \sim N(2, 3^2)$ és $Z \sim N(1, 4^2)$, akkor

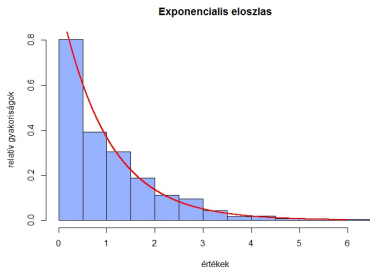
$$Y + Z \sim N(3, 5^2); \quad Y - Z \sim N(1, 5^2); \quad Y + 3Z \sim N(5, 57).$$

Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Legyen $\lambda > 0$ valós szám. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(s) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda s}, & \text{ha } s > 0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



12. ábra. $\text{Exp}(1)$ sűrűségfüggvénye és 500 elemű minta hisztogramja.

Az exponenciális eloszlás tulajdonságai

Állítás

Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel. Ekkor a következők teljesülnek.

(i) X eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X < t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda s}, & \text{ha } s > 0; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

(ii) X várható értéke: $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, szórása: $D(X) = 1/\lambda$.

(iii) **Örökifjú tulajdonság.** Legyenek s, t pozitív számok. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

Példa. Radioaktív részecske bomlási ideje, kiszolgálási vagy feldolgozási idő.