

Valószínűségszámítás és statisztika

Informatika BSc, esti tagozat
Backhausz Ágnes

2015/2016. tavaszi félév

Bevezetés

Célok:

- véletlen folyamatok modellezése;
- kísérletekből, felmérésekből származó adatok elemzése;
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján;
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata;
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése.

Bevezetés

Célok:

- véletlen folyamatok modellezése;
- kísérletekből, felmérésekből származó adatok elemzése;
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján;
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata;
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése.

Alkalmazási területek:

- élő és élettelen természettudományok, társadalomtudományok: kísérleti eredmények értelmezése;
- gazdasági folyamatok elemzése, biztosítás- és pénzügyi matematika.

Valószínűség

- Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Valószínűség

- Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?
- Egy rendszert négy operátor üzemeltet. Mindegyikük minden napon a többiekéntől függetlenül $1/20$ valószínűséggel hiányzik.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy napon legalább hárman hiányoznak? Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb ketten hiányoznak?

Valószínűség

- Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?
- Egy rendszert négy operátor üzemeltet. Mindegyikük minden napon a többiek-től függetlenül $1/20$ valószínűséggel hiányzik.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy napon legalább hárman hiányoznak? Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb ketten hiányoznak?

Annak, hogy pontosan ketten hiányoznak? Hogy pontosan egy ember hiányzik? Hogy nem hiányzik senki?

Valószínűség

- Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?
- Egy rendszert négy operátor üzemeltet. Mindegyikük minden napon a többiek-től függetlenül $1/20$ valószínűséggel hiányzik.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy napon legalább hárman hiányoznak? Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb ketten hiányoznak?

Annak, hogy pontosan ketten hiányoznak? Hogy pontosan egy ember hiányzik? Hogy nem hiányzik senki?

- Mennyi a valószínűsége, hogy holnap a csapadékmennyiség nem haladja meg a 10 mm-t?

Valószínűség

- Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?
- Egy rendszert négy operátor üzemeltet. Mindegyikük minden napon a többiekétől függetlenül $1/20$ valószínűséggel hiányzik.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy napon legalább hárman hiányoznak? Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb ketten hiányoznak?

Annak, hogy pontosan ketten hiányoznak? Hogy pontosan egy ember hiányzik? Hogy nem hiányzik senki?

- Mennyi a valószínűsége, hogy holnap a csapadékmennyiség nem haladja meg a 10 mm-t?
- Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember balkezes? Annak, hogy pontosan 0, 1, 2, ... testvére van? Annak, hogy a testmagassága 190 cm és 200 cm közé esik?

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Definíció

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *hármass* **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- Ω *nem üres halmaz*;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, *azaz minden* $A \in \mathcal{A}$ -*ra* $A \subseteq \Omega$ *úgy, hogy*
 - (i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
 - (ii) *ha* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, *akkor* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *(azaz megszámlálható sok* \mathcal{A} -*beli elem uniója is* \mathcal{A} -*beli)*;
 - (iii) *ha* $A \in \mathcal{A}$, *akkor* $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ *(azaz* \mathcal{A} -*beli halmazok komplementere is* \mathcal{A} -*beli)*.
- $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ *függvény, melyre*
 - (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
 - (ii) *ha* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ *és minden* $1 \leq i < j$ -*re* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *akkor*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- Ω : eseménytér vagy elemi események halmaza.
- Ω elemei ($\omega \in \Omega$): elemi események.
- \mathcal{A} : események halmaza (vagy események σ -algebrája).
- \mathcal{A} elemei ($A \in \mathcal{A}$): események.
- \mathbb{P} : valószínűség (probability).
- Ω esemény neve: biztos esemény.
- \emptyset (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény.
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ kizáró események, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz nincs olyan $\omega \in A$, melyre $\omega \in B$ is teljesül.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ olyan mértéktér, ahol $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ teljesül, \mathbb{P} pedig egy mérték.

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel.

- $\Omega = \{11, 12, 13, \dots, 65, 66\}$, ahol például **13** azt jelenti, hogy a piros dobás 1, a kék 3 (ez különbözik **31**-től). $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$, vagyis 36 darab elemi esemény (dobássorozat) van.
- \mathcal{A} : az Ω összes részhalmaza. $|\mathcal{A}| = 2^{36}$.
- $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{36}$ minden $A \in \mathcal{A}$ -ra. Például:

$$A = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\} = \{\text{az összeg } 7\}.$$

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Tehát $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$.

Példa: geometriai valószínűség

Egy $R = 30$ cm sugarú céltábla. Feltételezzük, hogy a lövedék biztosan eltalálja a céltáblát, és a lövés helye véletlenszerűen, egyenletesen helyezkedik el.

A céltábla középső $r = 5$ cm sugarú körlemeze 10 pontot ér. Mennyi a valószínűsége, hogy sikerül 10 pontot elérni?

Példa: geometriai valószínűség

Egy $R = 30$ cm sugarú céltábla. Feltételezzük, hogy a lövedék biztosan eltalálja a céltáblát, és a lövés helye véletlenszerűen, egyenletesen helyezkedik el.

A céltábla középső $r = 5$ cm sugarú körlemeze 10 pontot ér. Mennyi a valószínűsége, hogy sikerül 10 pontot elérni?

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 30\}$.
- \mathcal{A} : az Ω Lebesgue-mérhető részhalmazai (vagy a Borel-halmazok, vagyis a körlemezek által generált σ -algebra).
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5\}$.

Példa: geometriai valószínűség

Egy $R = 30$ cm sugarú céltábla. Feltételezzük, hogy a lövedék biztosan eltalálja a céltáblát, és a lövés helye véletlenszerűen, egyenletesen helyezkedik el.

A céltábla középső $r = 5$ cm sugarú körlemeze 10 pontot ér. Mennyi a valószínűsége, hogy sikerül 10 pontot elérni?

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 30\}$.
- \mathcal{A} : az Ω Lebesgue-mérhető részhalmazai (vagy a Borel-halmazok, vagyis a körlemezek által generált σ -algebra).
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5\}$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{A \text{ területe}}{\Omega \text{ területe}} = \frac{r^2\pi}{R^2\pi} = \frac{1}{36}.$$

A valószínűség elemi tulajdonságai

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

Definíció

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események.

- *Unió:* $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ vagy } \omega \in B\}$.
- *Metszet:* $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ és } \omega \in B\}$.
- *Komplementer/ellentett esemény:* $\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$.
- *Különbség:* $B \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \in B \text{ és } \omega \notin A\}$.
- *A maga után vonja B-t, ha minden $\omega \in A$ -ra $\omega \in B$ is teljesül. Jelölés:* $A \subseteq B$.

A valószínűség elemi tulajdonságai

Állítás (Komplementer valószínűsége)

Ha $A \in \mathcal{A}$ esemény, akkor $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Állítás (Különbség valószínűsége)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

A valószínűség elemi tulajdonságai

Állítás (Komplementer valószínűsége)

Ha $A \in \mathcal{A}$ esemény, akkor $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Állítás (Különbség valószínűsége)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

Állítás (Tartalmazás)

Ha az $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

A valószínűség elemi tulajdonságai

Állítás (Komplementer valószínűsége)

Ha $A \in \mathcal{A}$ esemény, akkor $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Állítás (Különbség valószínűsége)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

Állítás (Tartalmazás)

Ha az $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Állítás (Szitaformula)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Szitaformulák

Állítás

Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ eseményekre teljesül, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ & - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Szitaformulák

Állítás

Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ eseményekre teljesül, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ &\quad - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Legyenek A_1, \dots, A_k tetszőleges események. Ekkor az események uniójának valószínűségét a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) &= \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \\ &\quad - \dots + (-1)^{k+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \\ &= \sum_{t=1}^k (-1)^{t+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_t}).\end{aligned}$$

A valószínűségek kombinatorikai kiszámítási módja

Tegyük fel, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőre az alábbiak teljesülnek (**klasszikus valószínűségi mező**):

- Ω véges sok elemből áll: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.
- \mathcal{A} az Ω összes részhalmazából áll.
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$ minden $\omega \in \Omega$ -ra, azaz az elemi események valószínűsége egyenlő.

A valószínűségek kombinatorikai kiszámítási módja

Tegyük fel, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőre az alábbiak teljesülnek (**klasszikus valószínűségi mező**):

- Ω véges sok elemből áll: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.
- \mathcal{A} az Ω összes részhalmazából áll.
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$ minden $\omega \in \Omega$ -ra, azaz az elemi események valószínűsége egyenlő.

Ilyenkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{A \text{ elemeinek száma}}{\Omega \text{ elemeinek száma}} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Példa: két kockadobás, visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel.

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 balkezes és 25 jobbkezes gyerek van. Tornaórán véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két balkezes gyerek van?

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 balkezes és 25 jobbkezes gyerek van. Tornaórán véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két balkezes gyerek van?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két balkezes}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}}.$$

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 balkezes és 25 jobbkezes gyerek van. Tornaórán véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két balkezes gyerek van?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két balkezes}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}}.$$

Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér. **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva). Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Visszatevéses mintavétel

Egy osztályban 14 lány és 22 fiú van. Minden fizikaórán a tanár kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet). Mennyi annak valószínűsége, hogy hat fizikaórából pontosan két olyan van, amikor lány felel?

Visszatevéses mintavétel

Egy osztályban 14 lány és 22 fiú van. Minden fizikaórán a tanár kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet). Mennyi annak valószínűsége, hogy hat fizikaórából pontosan két olyan van, amikor lány felel?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{6}{2} \frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6}.$$

Visszatevéses mintavétel

Egy osztályban 14 lány és 22 fiú van. Minden fizikaórán a tanár kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet). Mennyi annak valószínűsége, hogy hat fizikaórából pontosan két olyan van, amikor lány felel?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{6}{2} \frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6}.$$

Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér. **Visszatevéssel** kihúznak n darabot (minden húzásnál mind az N golyót azonos valószínűséggel választva). Annak valószínűsége, hogy pontosan k húzásnál jön fekete:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N - M)^{n-k}}{N^n}.$$

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Az A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Az A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Példa: Gábornak három gyereke van. Feltéve, hogy pontosan egy fia van, mennyi a valószínűsége, hogy a középső gyermeke fiú?

Feltételes valószínűség

Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Az A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Példa: Gábornak három gyereke van. Feltéve, hogy pontosan egy fia van, mennyi a valószínűsége, hogy a középső gyermeke fiú?

A : a középső gyerek fiú; B : pontosan egy fiú van.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{a középső fiú}) = \frac{1}{2}.$$

A $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget így számolhatjuk ki:

$$\mathbb{P}(\text{a középső fiú} | \text{egy fiú van}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(LFL)}{\mathbb{P}(FLL, LFL, LLF)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = 1/3.$$

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ (véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha

- (i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$;
- (ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ teljesül minden $1 \leq i < j$ -re;
- (iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ minden $i = 1, 2, \dots$ -re.

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ (véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha

- (i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$;
- (ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ teljesül minden $1 \leq i < j$ -re;
- (iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ minden $i = 1, 2, \dots$ -re.

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, B_1, B_2, \dots pedig teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Bayes-tétel

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, B_1, B_2, \dots pedig teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Tétel (Bayes-tétel)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(A) > 0$, B_1, B_2, \dots pedig teljes eseményrendszer. Ekkor minden $k = 1, 2, \dots$ -ra teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

Függetlenség

Definíció

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Ha $A, B \in \mathcal{A}$ események, és $\mathbb{P}(B) > 0$: A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Függetlenség

Definíció

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Ha $A, B \in \mathcal{A}$ események, és $\mathbb{P}(B) > 0$: A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Példa. Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel.

A : a piros kockával hármat dobunk.

B : a kék kockával ötöt dobunk.

C : a dobott számok összege 6.

Függetlenség

Definíció

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Ha $A, B \in \mathcal{A}$ események, és $\mathbb{P}(B) > 0$: A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Példa. Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy késsel.

A : a piros kockával hármat dobunk.

B : a kék kockával ötöt dobunk.

C : a dobott számok összege 6.

A és B függetlenek.

A és C nem függetlenek, illetve B és C sem függetlenek.

Függetlenség

Definíció (Függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ véges sok esemény (teljesen) **függetlenek**, ha minden $1 \leq k \leq n$ -re és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ -re

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Az $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ megszámlálhatóan végtelen sok esemény (teljesen) független, ha minden $k \in \mathbb{N}$ -re és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$ -ra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Az $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Páronkénti függetlenség

Ha az A_1, A_2, \dots, A_n események függetlenek, akkor páronként függetlenek. De: a páronkénti függetlenségből nem következik a függetlenség.

Példa. Szabályos dobókockával kétszer dobunk. Legyen

A : az első dobás páros. B : a második dobás páros. C : a két dobás összege páros.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2.$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/4.$$

Ugyanakkor, ha az első és a második dobás páros, akkor a két dobás összege is biztosan páros, így

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Tehát: A, B, C páronként függetlenek, de nem függetlenek.

Páronkénti függetlenség

Állítás (Komplementer függetlensége)

Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ események függetlenek, akkor az $\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ események is függetlenek.

Állítás

Ha az $A, B \in \mathcal{A}$ események függetlenek, akkor

- *A és \overline{B} függetlenek;*
- *\overline{A} és B függetlenek;*
- *\overline{A} és \overline{B} függetlenek.*

Állítás

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(A) = 0$, vagy $\mathbb{P}(A) = 1$. Ekkor A és B függetlenek.

Szimmetrikus bolyongás

Tönkremenési feladat. Lolának kezdetben 0 forintja van. A kaszinóban minden körben (a korábbiaktól függetlenül) $1/2$ valószínűséggel nyer egy forintot, $1/2$ valószínűséggel veszít egy forintot. Ha a nyeresége eléri az 1000 forintot, vagy az adóssága a 200-t, be kell fejeznie a játékot. Mennyi a valószínűsége, hogy Lola nyer a játék végén, és nem adóssággal távozik?

Szimmetrikus bolyongás

Tönkremenési feladat. Lolának kezdetben 0 forintja van. A kaszinóban minden körben (a korábbiaktól függetlenül) $1/2$ valószínűséggel nyer egy forintot, $1/2$ valószínűséggel veszít egy forintot. Ha a nyereménye eléri az 1000 forintot, vagy az adóssága a 200-t, be kell fejeznie a játékot. Mennyi a valószínűsége, hogy Lola nyer a játék végén, és nem adóssággal távozik?

A nullából indulva minden lépésben a korábbiaktól függetlenül $1/2$ valószínűséggel felfelé, $1/2$ valószínűséggel lefelé lépünk egyet a számegegyesen.

- Mennyi a valószínűsége, hogy n lépés után éppen az k számban vagyunk?
- Mennyi a valószínűsége, hogy az $a > 0$ számot hamarabb érjük el, mint a $b < 0$ számot?
- Mennyi a valószínűsége, hogy végtelen sokszor visszatérünk a 0-ba?

Szimmetrikus bolyongás

Annak valószínűsége, hogy n lépés után éppen a k számra érünk:

$$\begin{cases} \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{(n-k)/2}, & \text{ha } n - k \text{ páros;} \\ 0, & \text{ha } n - k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Összesen 2^n lehetséges útvonal van n lépés során, ezek egyformán valószínűek. Közülük $\binom{n}{(n-k)/2}$ érkezik k -ba.

Szimmetrikus bolyongás

Annak valószínűsége, hogy n lépés után éppen a k számra érünk:

$$\begin{cases} \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{(n-k)/2}, & \text{ha } n - k \text{ páros;} \\ 0, & \text{ha } n - k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Összesen 2^n lehetséges útvonal van n lépés során, ezek egyformán valószínűek. Közülük $\binom{n}{(n-k)/2}$ érkezik k -ba.

Megjegyzés. A nullába 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatérünk. Ugyanez érvényes a \mathbb{Z}^2 -en való bolyongásra is, de \mathbb{Z}^d -re nem, ha $d \geq 3$: ilyenkor annak valószínűsége, hogy valaha visszatérünk a nullába, egynél kisebb pozitív szám. (Pólya-tétel)

Szimmetrikus bolyongás

Annak valószínűsége, hogy sem a -t, sem b -t nem érjük el a bolyongás során (a, b egészek): 0.

$a > 0 > b$ egészek. Legyen p_k annak valószínűsége, hogy a k -ból indulva hamarabb érjük el a -t, mint b -t. A teljes valószínűség tétele alapján:

$$p_k = \frac{1}{2} \cdot p_{k-1} + \frac{1}{2} \cdot p_{k+1} \quad (b < k < a).$$

Továbbá $p_b = 0$ és $p_a = 1$. A lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$p_k = \frac{k - b}{a - b} \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{-b}{a - b}.$$

(Lolának 20% esélye van a győzelemre.)

Valószínűségi változó

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény valószínűségi változó, ha tetszőleges $a < b$ valós számokra

$$\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}.$$

Valószínűségi változó

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény valószínűségi változó, ha tetszőleges $a < b$ valós számokra

$$\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}.$$

Példa. Valakinek három gyereke születik. Legyen X a fiúk száma. Ekkor

$$\Omega = \{FFF, FFL, FLF, FLL, LFF, LFL, LLF, LLL\};$$

$$X(LLL) = 0; \quad X(LLF) = X(LFL) = X(FLL) = 1;$$

$$X(FFL) = X(FLF) = X(LFF) = 2; \quad X(FFF) = 3.$$

Diszkrét valószínűségi változó eloszlása

Definíció (Diszkrét valószínűségi változó)

Az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó diszkrét, ha véges sok vagy megszámlálható sok értéket vesz fel.

Definíció (Eloszlás)

Legyenek az X valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$, és legyen

$$p_i = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}) = \mathbb{P}(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Ekkor az $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$ sorozat az X valószínűségi változó eloszlása.

Ezentúl a definícióban szereplő rövidebb, $\mathbb{P}(X = x_i)$ jelölést fogjuk használni.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlása

Példa: három gyerek. Az előző példában: háromszor gyerek születik, X a fiúk száma. Ekkor X lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3. Tegyük fel, hogy minden gyerek a többiektől függetlenül $1/2$ valószínűséggel fiú. Eszerint mind a nyolc lehetőség valószínűsége $1/8$, hiszen például $\mathbb{P}(FLF) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1/8; \quad \mathbb{P}(X = 1) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 2) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/8.$$

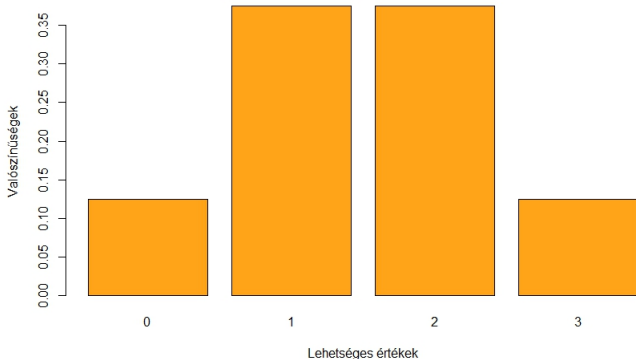
Mindezek alapján X eloszlása az alábbi sorozat:

$$(0, 1/8), \quad (1, 3/8), \quad (2, 3/8), \quad (3, 1/8).$$

Példa: szabályos kockadobás. Egyszer dobunk szabályos dobókockával, jelölje Y a dobott számot. Ekkor Y eloszlása:

$$(1, 1/6), \quad (2, 1/6), \quad (3, 1/6), \quad (4, 1/6), \quad (5, 1/6), \quad (6, 1/6).$$

Példa: a gyerekek számának eloszlása.



1. ábra.

A fiúk számának lehetséges értékei a három gyerek közül és a hozzájuk tartozó valószínűségek

Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$. Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad \text{ha } \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$. Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad \text{ha } \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Példa: három gyerek. Legyen X a fiúk száma a három gyerek közül. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Példa: szabályos kockadobás. Legyen Y egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Definíció (Szórásnégyzet)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right).$$

Definíció (Szórás)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)}.$$

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Definíció (Szórásnégyzet)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right).$$

Definíció (Szórás)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)}.$$

Állítás (A szórás kiszámítása egész értékek esetén)

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik, és melynek lehetséges értékei nemnegatív egészek. Ekkor

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) \right]^2.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Legyen továbbra is X a fiúk száma három gyerek közül:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1/8; \quad \mathbb{P}(X = 1) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 2) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/8.$$

Diszkrét esetben így számolhatunk:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^3 k^2 \mathbb{P}(X = k) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3.$$

Ebből és a korábbi számolásból

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 3 - 1,5^2 = 3 - 2,25 = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Végül pedig a fiúk számának szórása:

$$D(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866.$$

A kockadobás szórása: $D(Y) = 1,7078$.

Binomiális eloszlás

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Binomiális eloszlás

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Definíció

Az X valószínűségi változó **binomiális eloszlású** n renddel és p paraméterrel, ha lehetséges értékei:

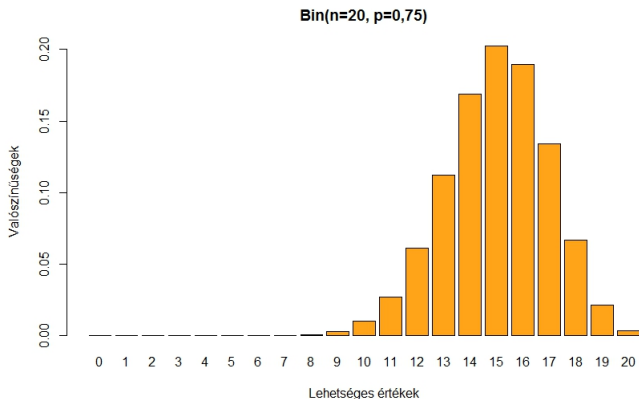
$$0, 1, 2, \dots, n,$$

és minden $1 \leq k \leq n$ egészre

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

($n \geq 1$ egész, $0 < p < 1$.) Jelölés: $\text{Bin}(n, p)$.

Példa: binomiális eloszlás



2. ábra. Binomiális eloszlás, $n = 20$, $p = 0,75$.

Példa: binomiális eloszlás

- A fiúk száma: 3 gyerek esetén a születendő fiúk száma binomiális eloszlású $n = 3$ renddel és $p = 1/2$ paraméterrel (függetlenséget feltételezve).

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fiú születik}) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{3}{k} 0,5^k 0,5^{3-k}.$$

Például

$$\mathbb{P}(\text{pontosan 2 fiú születik}) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} 0,5^2 0,5^1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3/8.$$

- Visszatevéses mintavételnél a húzott fekete golyók száma (N golyó, ebből M fekete, n -szer húzunk visszatevéssel) binomiális eloszlású n renddel és $p = M/N$ paraméterrel:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k (N - M)^{n-k}}{N^n}.$$

A binomiális eloszlás tulajdonságai

Állítás

Legyen X binomiális eloszlású valószínűségi változó n renddel és p paraméterrel.

(a) Az $X \sim \text{Bin}(n, p)$ binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

(b) Az $X \sim \text{Bin}(n, p)$ binomiális eloszlású valószínűségi változó szórása:

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

(c) Az a k érték, melyre $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ maximális (vagyis X módusza): $[(n+1)p]$, ahol $[\cdot]$ az egész részt jelöli. Ha $(n+1)p$ egész, akkor az eggyel kisebb k is maximális értéket ad.

Példa: $X \sim \text{Bin}(3, 1/2)$ a fiúk száma. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = 3 \cdot 1/2 = 3/2; \quad D(X) = \sqrt{3 \cdot 1/2 \cdot 1/2} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,866.$$

Hipergeometrikus eloszlás

Definíció

Legyenek N, M, n pozitív egészek úgy, hogy $1 \leq n \leq M \leq N$. Az X valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású** N, M és n paraméterekkel ha lehetséges értékei

$$k = 0, 1, \dots, n,$$

és $k = 0, 1, \dots, n$ esetén

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Hipergeometrikus eloszlás

Definíció

Legyenek N, M, n pozitív egészek úgy, hogy $1 \leq n \leq M \leq N$. Az X valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású** N, M és n paraméterekkel ha lehetséges értékei

$$k = 0, 1, \dots, n,$$

és $k = 0, 1, \dots, n$ esetén

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Példa: visszatevés nélküli mintavételnél a húzott fekete golyók száma.

Lottósorsolásnál a találatok száma (X) hipergeometrikus eloszlású $N = 90$, $M = 5$, $n = 5$ paraméterekkel:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

A hipergeometrikus eloszlás tulajdonságai

Állítás

Legyen az X valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású N , M és n paraméterekkel.

(a) Az X valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{M}{N}.$$

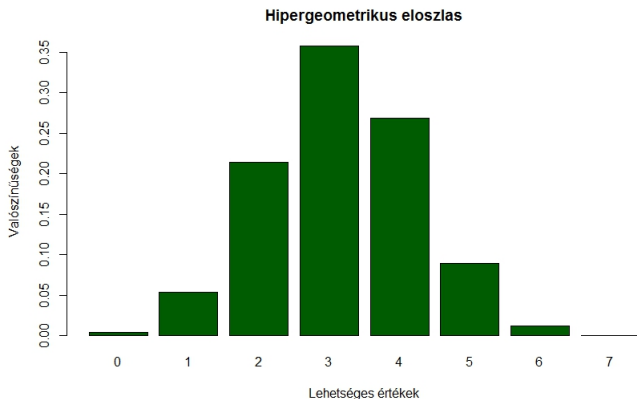
(b) Az X valószínűségi változó szórása:

$$D(X) = \sqrt{n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}.$$

Példa. Az ötöslottón a találatok számának várható értéke és szórása:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{25}{90} = 0,2778; \quad D(X) = 0,5006.$$

Példa: a hipergeometrikus eloszlás



3. ábra. Hipergeometrikus eloszlás, $N = 20$, $M = 9$, $n = 7$.

Geometriai eloszlás

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Y : hányadik kísérlet az első sikeres.

Geometriai eloszlás

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Y : hányadik kísérlet az első sikeres.

Definíció

Az Y valószínűségi változó **geometriai eloszlású** p paraméterrel, ha lehetséges értékei:

$$1, 2, 3 \dots$$

és minden $1 \leq k$ egészre

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

($0 < p < 1$.) Jelölés: $\text{Geo}(p)$. Másik elnevezés: Pascal-eloszlás.

A geometriai eloszlás tulajdonságai

Példa: egy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után. Jelölje Y , hogy hányadik dobásnál kapjuk az első hatost. Ekkor Y geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel. Y lehetséges értékei $k = 1, 2, \dots$, és

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

A geometriai eloszlás tulajdonságai

Példa: egy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után. Jelölje Y , hogy hányadik dobásnál kapjuk az első hatost. Ekkor Y geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel. Y lehetséges értékei $k = 1, 2, \dots$, és

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Állítás

Legyen Y geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel.

(a)

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}; \quad D(Y) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

(b) A $\mathbb{P}(Y = k)$ valószínűség $k = 1$ -re maximális.

A geometriai eloszlás tulajdonságai

Példa: egy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után. Jelölje Y , hogy hányadik dobásnál kapjuk az első hatost. Ekkor Y geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel. Y lehetséges értékei $k = 1, 2, \dots$, és

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Állítás

Legyen Y geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel.

(a)

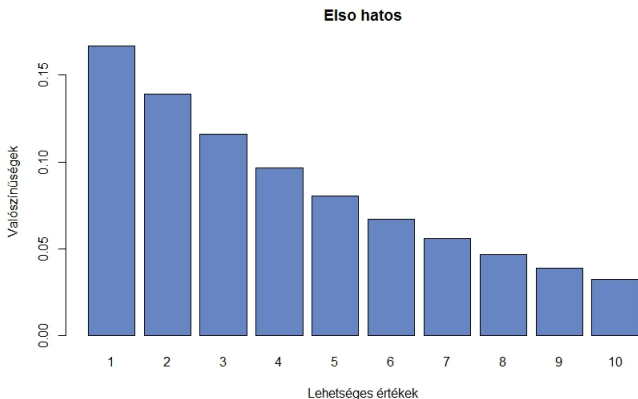
$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}; \quad D(Y) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

(b) A $\mathbb{P}(Y = k)$ valószínűség $k = 1$ -re maximális.

A példában szereplő Y várható értéke és szórása:

$$\mathbb{E}(Y) = 6; \quad D(Y) = \sqrt{\frac{5/6}{1/36}} = \sqrt{30} = 5,477.$$

Példa: geometriai eloszlás



4. ábra. Az első hatos eloszlása: geometriai eloszlás, $p = 1/6$, $k = 10$ -ig.

Negatív binomiális eloszlás

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Z : hányadik kísérlet az r . sikeres.

Negatív binomiális eloszlás

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Z : hányadik kísérlet az r . sikeres.

Definíció

A Z valószínűségi változó **negatív binomiális eloszlású** p paraméterrel, ha lehetséges értékei:

$$r, r + 1, r + 2, \dots$$

és minden $k \geq r, r + 1, r + 2 \dots$ egészre

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r.$$

($r \geq 1$ egész, $0 < p < 1$.)

$r = 1$ -re a negatív binomiális eloszlás megegyezik a geometriai eloszlással.

Negatív binomiális eloszlás

Definíció

A Z valószínűségi változó **negatív binomiális eloszlású** p paraméterrel, ha lehetséges értékei:

$$r, r + 1, r + 2, \dots$$

és minden $k \geq r, r + 1, r + 2 \dots$ egészre

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r.$$

($r \geq 1$ egész, $0 < p < 1$.)

Állítás (A negatív binomiális eloszlás tulajdonságai)

Legyen Z negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel. Ekkor

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{r}{p}; \quad D(Z) = \sqrt{r \frac{1-p}{p^2}}.$$

Poisson-eloszlás

Definíció

Legyen $s > 0$. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó s paraméterű Poisson-eloszlású, ha lehetséges értékei $k = 0, 1, 2, \dots$, a hozzájuk tartozó valószínűségek pedig:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{s^k}{k!} e^{-s} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Állítás (A Poisson-eloszlás tulajdonságai)

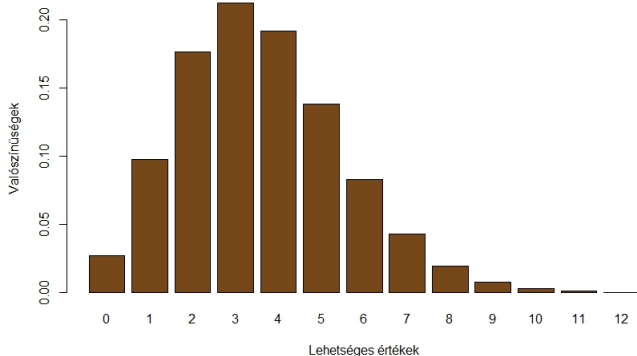
Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó s paraméterrel.

(a) Ekkor X várható értéke, szórása és szórásnégyzete:

$$\mathbb{E}(X) = s; \quad D(X) = \sqrt{s}; \quad D^2(X) = s.$$

(b) A $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség $k = [s]$ esetén maximális. Ha s egész, az eggyel kisebb k is a legnagyobb értéket adja.

Példa: Poisson-eloszlás



5. ábra. Poisson-eloszlás, $s = 3,61$, $k = 12$ -ig.

A Poisson-eloszlás és a binomiális eloszlás kapcsolata

A Poisson-eloszlást általában akkor használják, ha sok független, kis valószínűséggel bekövetkező eseménynél a bekövetkező események számát kell tekinteni. Például:

- a sajtóhibák száma egy könyvben;
- egy biztosító 15000 ügyfele által összesen okozott balesetek száma;
- nagyobb tüzesetek száma egy adott időszakban.

Legyen $s > 0$ pozitív szám, és $p_n = s/n$ minden $n = 1, 2, \dots$ egészre. Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó s paraméterrel, Y_n eloszlása pedig $\text{Bin}(n, p_n)$. Ekkor tetszőleges $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(X = k),$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{s^k}{k!} e^{-s} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A Poisson-eloszlás és a binomiális eloszlás kapcsolata

Legyen $s > 0$ pozitív szám, és $p_n = s/n$ minden $n = 1, 2, \dots$ egészre. Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó s paraméterrel, Y_n eloszlása pedig $\text{Bin}(n, p_n)$. Ekkor tetszőleges $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(X = k),$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{s^k}{k!} e^{-s} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

- X Poisson-eloszlású $s = 3,61$ paraméterrel;
- Y binomiális eloszlás $n = 92$ renddel és $p = 0,0392$ paraméterrel;
- vegyük észre, hogy $\mathbb{E}(X) = s = 3,61 = n \cdot p = \mathbb{E}(Y)$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X = k)$	0,027	0,098	0,176	0,212	0,191	0,138	0,083	0,042
$\mathbb{P}(Y = k)$	0,025	0,094	0,176	0,215	0,195	0,14	0,083	0,043

Függetlenség

Definíció (Véges eset)

Azt mondjuk, hogy az $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq t_2) \dots \mathbb{P}(X_n \leq t_n)$$

teljesül tetszőleges t_1, t_2, \dots, t_n valós számokra.

Definíció (Végtelen eset)

Az $X_1, X_2, X_3 \dots$ valószínűségi változók függetlenek, ha közülük bármely véges sokat kiválasztva független valószínűségi változókat kapunk.

Állítás (Egész értékű eset)

Az $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = \mathbb{P}(X_1 = k_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = k_2) \dots \mathbb{P}(X_n = k_n)$$

teljesül tetszőleges k_1, k_2, \dots, k_n egész számokra.

Függetlenség

Független valószínűségi változókra példa:

- Két kockadobásnál az elsőként (X_1) és másodikként dobott szám (X_2).
- A holtapi csapadékmennyiség Budapesten és Torontóban.
- Két találomra választott ember testmagassága.

Nem független valószínűségi változókra példa:

- Két kockadobásnál az első szám és a két dobott szám összege.
- A holtapi csapadékmennyiség Budapesten és Budaörsön.
- Két testvér testmagassága.

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor X eloszlásfüggvénye az alábbi $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ valós számra.}$$

Állítás

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, és F az X eloszlásfüggvénye, akkor

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor X eloszlásfüggvénye az alábbi $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ valós számra.}$$

Állítás

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, és F az X eloszlásfüggvénye, akkor

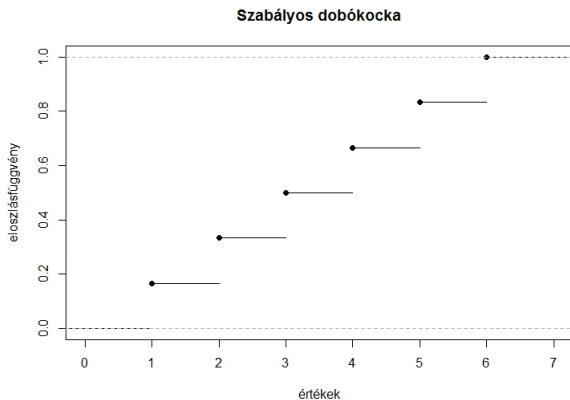
$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Állítás (Az eloszlásfüggvény tulajdonságai)

Legyen X valószínűségi változó, F pedig az eloszlásfüggvénye. Ekkor

- (i) F monoton növekvő: $a < b$ esetén $F(a) \leq F(b)$.
- (ii) $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$.
- (iii) F jobbról folytonos, azaz minden $t \in \mathbb{R}$ valós számra $\lim_{s \rightarrow t^-} F(s) = F(t)$.

Példa: eloszlásfüggvény



6. ábra. Szabályos dobókockával dobott szám eloszlásfüggvénye.

Folytonos valószínűségi változó

Ha a $G : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ függvény rendelkezik az előző állításban szereplő (i) – (iii) tulajdonságokkal, akkor van olyan valószínűségi változó, melynek G az eloszlásfüggvénye.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó folytonos, ha eloszlásfüggvénye folytonos.

Egy valószínűségi változó pontosan akkor folytonos, ha $\mathbb{P}(X = t) = 0$ teljesül minden t számra.

Abszolút folytonos valószínűségi változó

Definíció (Abszolút folytonosság és sűrűségfüggvény)

Az X valószínűségi változó **abszolút folytonos**, ha van olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra. Ilyenkor az f függvényt az X valószínűségi változó **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Abszolút folytonos valószínűségi változó

Definíció (Abszolút folytonosság és sűrűségfüggvény)

Az X valószínűségi változó **abszolút folytonos**, ha van olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra. Ilyenkor az f függvényt az X valószínűségi változó **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Állítás

Legyen az X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f . Ekkor tetszőleges $a < b$ számokra teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(s) ds.$$

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Állítás (Az eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény kapcsolata)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek F az eloszlásfüggvénye.

(a) Ha f az X sűrűségfüggvénye, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ számra

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds.$$

(b) Az $f(t) = F'(t)$ függvény (azokra a t -kre, ahol F differenciálható) az X sűrűségfüggvénye.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Állítás (Az eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény kapcsolata)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek F az eloszlásfüggvénye.

(a) Ha f az X sűrűségfüggvénye, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ számra

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds.$$

(b) Az $f(t) = F'(t)$ függvény (azokra a t -kre, ahol F differenciálható) az X sűrűségfüggvénye.

Állítás (A sűrűségfüggvény jellemzése)

Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor sűrűségfüggvénye valamilyen valószínűségi változónak, ha

(i) $f(s) \geq 0$ teljesül “majdnem minden” $s \in \mathbb{R}$ -re (például véges vagy megszámlálható sok kivétel lehetséges).

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 1$.

Várható érték és szórás

Definíció (Várható érték, abszolút folytonos eset)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f .
Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds,$$

ha ez az integrál létezik és véges.

Várható érték és szórás

Definíció (Várható érték, abszolút folytonos eset)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f . Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds,$$

ha ez az integrál létezik és véges.

Definíció (Szórásnégyzet és szórás)

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye f . Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2],$$

szórása pedig

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]},$$

ha ezek a várható értékek léteznek.

Szórásnégyzet és szórás

Definíció (Szórásnégyzet és szórás)

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye f . Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2],$$

szórása pedig

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]},$$

ha ezek a várható értékek léteznek.

Állítás (A szórásnégyzet kiszámítása)

A szórásnégyzetet a következőképpen számíthatjuk ki abszolút folytonos X valószínűségi változó esetén:

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 f(s) ds - \left[\int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds \right]^2,$$

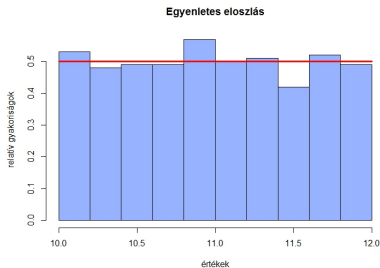
ahol f az X sűrűségfüggvénye.

Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Legyenek $a < b$ valós számok. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



7. ábra. $U(10, 12)$ sűrűségfüggvény és 500 elemű minta hisztogramja.

Egyenletes eloszlás

Állítás (Az egyenletes eloszlás tulajdonságai)

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor a következők teljesülnek.

(i) X eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq a; \\ \frac{t-a}{b-a}, & \text{ha } a < t < b; \\ 1, & \text{ha } t \geq b. \end{cases}$$

(ii) Ha $a \leq c \leq d \leq b$, akkor

$$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(s) ds = \int_c^d \frac{1}{b-a} ds = \frac{d-c}{b-a}.$$

(iii) Az X valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Példa: egyenletes eloszlás

Példa. Csomagot várunk, a futár 10 és 12 óra között érkezik. Feltessük, hogy érkezésének időpontja egyenletes eloszlású a $[10, 12]$ intervallumon. Ekkor az előző állítás alapján az alábbiak igazak ($a = 10, b = 12$).

- Annak valószínűsége, hogy 10 és 11 óra között érkezik: $(11 - 10)/(12 - 10) = 1/2$.
- Annak valószínűsége, hogy 10:15 és 10:30 között érkezik, $1/8 = 0,125$.
- Érkezési időpontjának várható értéke: $(10 + 12)/2 = 11$ óra.
- Érkezési időpontjának szórása: $(12 - 10)/\sqrt{12} = 1/\sqrt{3} = 0,5774$.

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Legyen m valós, σ pedig pozitív szám. Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó **normális eloszlású** m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Jelölése: $Y \sim N(m, \sigma^2)$.

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Legyen m valós, σ pedig pozitív szám. Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó **normális eloszlású** m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

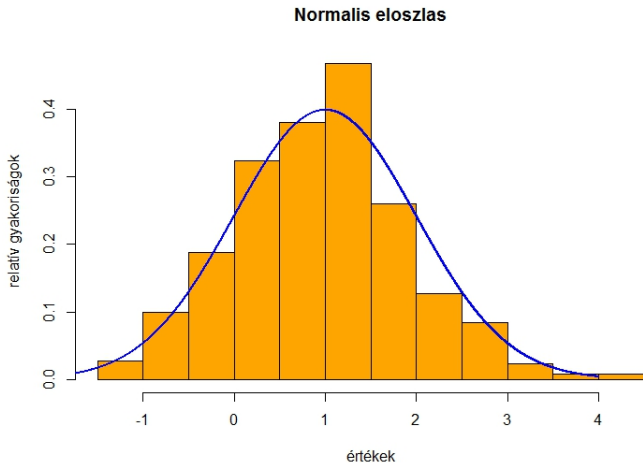
Jelölése: $Y \sim N(m, \sigma^2)$.

Ha $Y \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}(Y) = m$, $D(Y) = \sigma$.

Standard normális eloszlás: $m = 0$ várható értékű és $\sigma = 1$ szórással rendelkező normális eloszlás. Eloszlásfüggvénye: Φ , sűrűségfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Normális eloszlás



8. ábra.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye és 500 elemű minta hisztogramja

A normális eloszlás tulajdonságai

Tegyük fel, hogy Y normális eloszlású m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számokra

- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds.$
- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(Y < b) = \mathbb{P}(Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(a < Y) = \mathbb{P}(a \leq Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = 1 - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$

A normális eloszlás tulajdonságai

Tegyük fel, hogy Y normális eloszlású m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számokra

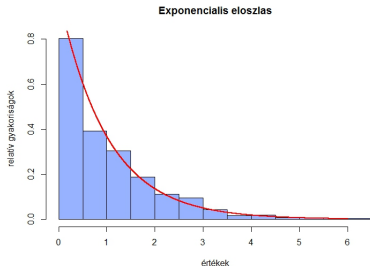
- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds.$
- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(Y < b) = \mathbb{P}(Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(a < Y) = \mathbb{P}(a \leq Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = 1 - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$
- Az $aY + b$ valószínűségi változó normális eloszlású $am + b$ várható értékkel és $a^2\sigma^2$ szórásnégyzettel.
- Ha Y_1, Y_2 független normális eloszlású valószínűségi változók, akkor $Y_1 + Y_2$ is normális eloszlású, várható értéke $m_1 + m_2$, szórásnégyzete $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ (ahol $Y_j \sim N(m_j, \sigma_j^2)$).

Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Legyen $\lambda > 0$ valós szám. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(s) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda s}, & \text{ha } s > 0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



9. ábra. $\text{Exp}(1)$ sűrűségfüggvénye és 500 elemű minta hisztogramja.

Az exponenciális eloszlás tulajdonságai

Állítás

Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel. Ekkor a következők teljesülnek.

(i) X eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X < t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda s}, & \text{ha } s > 0; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

(ii) X várható értéke: $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, szórása: $D(X) = 1/\lambda$.

(iii) **Örökifjú tulajdonság.** Legyenek s, t pozitív számok. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

Példa. Radioaktív részecske bomlási ideje.