Statisztikai mező (7. előadás)

Definíció

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ hármast **statisztikai mezőnek** *nevezzük, ha minden $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$-re $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező.*

Paraméteres statisztika mező: $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$. Ekkor ϑ az ismeretlen paraméter, mely egy $\Theta \subseteq \mathbb{R}^q$ ismert halmaz eleme.

Például: $\mathcal{P}$ lehet például

- a λ paraméterű Poisson-eloszlások halmaza;
- a normális eloszlások halmaza (ekkor $\vartheta = (m, \sigma)$ az ismeretlen paraméter);
- az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlások halmaza.

Minta és statiszika

Definíció (Minta)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ *statisztikai mező. Egy*

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to B \subseteq \mathbb{R}^n$$

valószínűségi vektorváltozót (n elemű) **mintának** *nevezünk. Itt B a mintatér, n a minta elemszáma vagy nagysága. A minta független, ha az* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *valószínűségi változók függetlenek.*

Minta és statiszika

Definíció (Minta)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ *statisztikai mező. Egy*

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to B \subseteq \mathbb{R}^n$$

valószínűségi vektorváltozót (n elemű) **mintának** *nevezünk. Itt* B *a mintatér,* n *a minta elemszáma vagy nagysága. A minta független, ha az* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *valószínűségi változók függetlenek.*

Definíció (Statisztika)

Legyen $T : B \to \mathbb{R}^k$ *függvény. Ekkor a* $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *valószínűségi változót statisztikának nevezzük.*

Például: $T(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}$ a mintaátlag, vagy $T(X_1, \ldots, X_n) = s_n^*$ a korrigált tapasztalati szórás.

Konfidenciaintervallumok

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ és $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ független azonos eloszlású minta. Tegyük fel, hogy ϑ valós paraméter, vagyis $\Theta \subseteq \mathbb{R}$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $(T_1(\underline{X}), T_2(\underline{X}))$ intervallum legalább $1-\alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum ϑ-ra, ha minden $\vartheta \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1(\underline{X}) < \vartheta < T_2(\underline{X})) \geq 1-\alpha.$$

A konfidenciaintervallum megbízhatósági szintje: $\inf_{\vartheta \in \Theta}\{\mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \in (T_1, T_2))\}$.

Konfidenciaintervallum

Példa: hatvan különböző mintából megmértük a talajvíz pH-értékét egy adott helyen.

A minta egy részlete:

5,98	6,1	5,99	6,21	5,97	6,23	...	5,85

Alapstatisztikák: $n = 60$ (méret), $\overline{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korrigált tapasztalati szórás)

Konfidenciaintervallum

Példa: hatvan különböző mintából megmértük a talajvíz pH-értékét egy adott helyen.

A minta egy részlete:

5,98	6,1	5,99	6,21	5,97	6,23	...	5,85

Alapstatisztikák: $n = 60$ (méret), $\overline{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korrigált tapasztalati szórás)

Cél: a várható érték becslése az adatok alapján

pontosabban: adjunk meg egy olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza az "igazi" várható értéket – ezt fogjuk **95 % megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumnak** hívni

Konfidenciaintervallum a várható értékre

A Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, azaz ha $Z \sim N(0,1)$:

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2/2} ds.$$

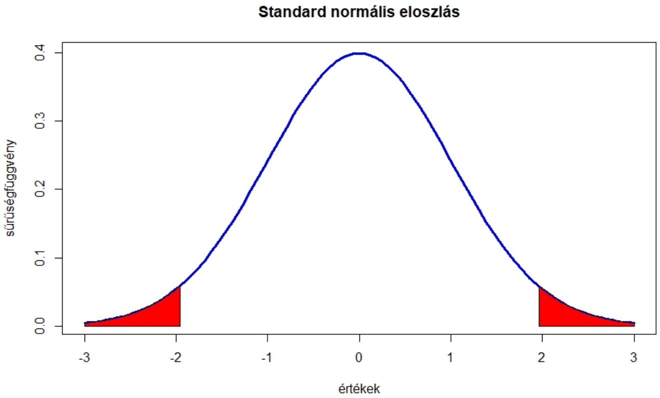
Állítás (Konfidenciaintervallum a várható értékre, ismert szórás)

Tegyük fel, hogy $X_1, \dots, X_n$ független azonos eloszlású **normális eloszlású** *való-színűségi változók, melyek szórása, σ ismert.*
Ekkor a

$$(T_1, T_2) = \left(\overline{X} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű **kétoldali konfidenciaintervallum** *az el-oszlás várható értékére.*

A kétoldali z-próba kritikus értéke



Az $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali z-próba (u-próba) kritikus értéke:
$\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96.$

Konfidenciaintervallum a várható értékre

$$(T_1, T_2) = \left(\overline{X} - \Phi^{-1}\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + \Phi^{-1}\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_m(T_1 \le m \le T_2) &= \mathbb{P}_m\left(m - \Phi^{-1}\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{X} \le m + \Phi^{-1}\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \mathbb{P}_m\left(-\Phi^{-1}\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big) \le \frac{\overline{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \le \Phi^{-1}\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\right) =\\
&= 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy mivel $X_1, \dots, X_n$ független $N(m, \sigma^2)$ eloszlásúak, így $\overline{X} \sim N(m, \sigma^2/n)$ eloszlású. Ezért $Z = (\overline{X} - m)/(\sigma/\sqrt{n})$ standard normális eloszlású, vagyis

$$\mathbb{P}(-a \le Z \le a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a) = 2\Phi(a) - 1.$$

Példa konfidenciaintervallumra

Minta: megmértük a talajvíz ph-értékét, tegyük fel, hogy ez **normális eloszlású, valódi szórása** $0,2$.

$n = 60$ (méret), $\overline{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korrigált tapasztalati szórás)

Adjunk meg olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza a ph-érték valódi várható értékét.

megbízhatósági szint: $1 - \alpha = 95\%$, azaz $\alpha = 0,05$. Ebből $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$.

95 %-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a várható értékre:

$$\left(5,99 - 1,96 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{60}}, \quad 5,99 + 1,96 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{60}}\right) = (5,94; 6,04).$$

Kisebb mintaelemszámhoz hosszabb, nagyobb megbízhatósághoz szintén hosszabb konfidenciaintervallum tartozik.

Fisher–Bartlett-tétel

Valójában az eloszlás valódi szórása a legtöbb esetben nem ismert. A σ szórást az s_n^* korrigált tapasztalati szórással helyettesítjük. Kérdés, hogyan változik így az eloszlás.

Tétel (Fisher–Bartlett)

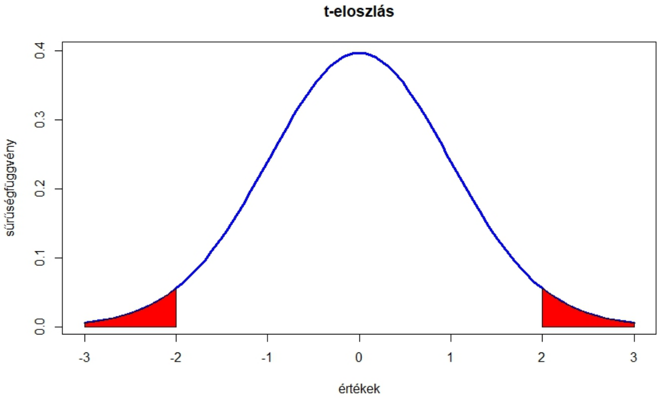
Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független m várható értékű, σ szórású, **normális eloszlású** *valószínűségi változók. Ekkor*

1. $\overline{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$;
2. $\overline{X}$ *és* s_n^* *függetlenek;*
3. $(n-1)s_n^{*2}/\sigma^2$ *eloszlása* $n-1$ *szabadsági fokú* χ^2*-eloszlás;*
4. $\frac{\overline{X}-m}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}$ *eloszlása* $n-1$ *szabadsági fokú* t*-eloszlás.*

Itt

$$s_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2\right) - \overline{X}^2\right)}.$$

t-eloszlás kritikus értékei



Az $f = 59$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali t-próba kritikus értéke: $t_{59,0,05} = 2,001$.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

Legyenek $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ független $N(0,1)$ eloszlásúak, és $t_{f,\alpha}$ az f szabadsági fokú α terjedelmű kétoldali t-próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú t-eloszlás $1-\alpha/2$-kvantilise:

$$1-\alpha/2 = \mathbb{P}(Y \le t_{f,\alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_f^2}} \le t_{f,\alpha} \right).$$

Az $Y = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_f^2}}$ valószínűségi változó eloszlása f szabadsági fokú ***t*-eloszlás**.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

Legyenek $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ független $N(0,1)$ eloszlásúak, és $t_{f,\alpha}$ az f szabadsági fokú α terjedelmű kétoldali t-próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú t-eloszlás $1-\alpha/2$-kvantilise:

$$1-\alpha/2 = \mathbb{P}(Y \le t_{f,\alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_f^2}} \le t_{f,\alpha}\right).$$

Az $Y = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_f^2}}$ valószínűségi változó eloszlása f szabadsági fokú **t-eloszlás**.

Állítás (Konfidenciaintervallum a várható értékre, ismeretlen szórás)

Tegyük fel, hogy $X_1, \ldots, X_n$ független $N(m,\sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változók (m, σ ismeretlenek). Ekkor a

$$(T_1, T_2) = \left(\overline{X} - t_{n-1,\alpha}\cdot\frac{s_n^*}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{n-1,\alpha}\cdot\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}\right)$$

intervallum $1-\alpha$ megbízhatósági szintű **kétoldali konfidenciaintervallum** *az eloszlás várható értékére.*

Példa konfidenciaintervallumra

Minta: megmértük a talajvíz ph-értékét, tegyük fel, hogy ez **normális eloszlású**, szórása nem ismert.

$n = 60$ (méret), $\overline{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korrigált tapasztalati szórás)

Adjunk meg olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza a ph-érték valódi várható értékét.

megbízhatósági szint: $1 - \alpha = 95\%$, azaz $\alpha = 0,05$. Az $f = 59$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali t-próba kritikus értéke: $t_{59,0,975} = 2$.

95 %-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a várható értékre:

$$\left(5,99 - 2 \cdot \frac{0,18}{\sqrt{60}}, \quad 5,99 + 2 \cdot \frac{0,18}{\sqrt{60}}\right) = (5,94; 6,04).$$

Hosszabb intervallumot kaptunk, mint ismert szórás esetén.

Hipotézisvizsgálat

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ paraméteres statisztikai mező, azaz $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamilyen Θ paramétertérrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, ahol tehát $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Nullhipotézis. $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis. $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

Hipotézisvizsgálat

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ paraméteres statisztikai mező, azaz $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamilyen Θ paramétertérrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, ahol tehát $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Nullhipotézis. $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis. $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

A minta $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, a mintatér legyen B (vagyis $(X_1, \ldots, X_n)$ a $B \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz egy véletlen eleme). A mintateret is felbontjuk két diszjunkt halmaz uniójára: $B = B_0 \cup B_1$, ahol $B_0 \cap B_1 = \emptyset$.

Elfogadási tartomány: B_0. Ha $(X_1, \ldots, X_n) \in B_0$, akkor H_0-t elfogadjuk.

Elutasítási (kritikus) tartomány: B_1. Ha $(X_1, \ldots, X_n) \in B_1$, akkor H_0-t elutasítjuk.

Tehát a nullhipotézist akkor fogadjuk el, ha a minta az elfogadási tartományba esik, különben elutasítjuk.

Hipotézisvizsgálat

Nullhipotézis (null hypothesis). $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis (alternative hypothesis). $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

- **Elsőfajú hibát** vétünk, ha H_0 igaz, és elutasítjuk.
- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance):

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\vartheta(\underline{X} \in B_1).$$

- **Másodfajú hibát** vétünk, ha H_0 nem igaz, és elfogadjuk.
- A próba **erőfüggvénye** az alábbi $\beta : \Theta_1 \to [0,1]$ függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(\underline{X} \in B_1) \qquad (\vartheta \in \Theta_1).$$

Hipotézisvizsgálat: p-érték

Definíció

Egy hipotézisvizsgálati feladatban a p-érték (p-value) a legnagyobb olyan szignifikanciaszint, ami mellett H_0-t elfogadjuk.

Vagyis ha α a szignifikanciaszint, akkor

$p < \alpha$ esetén elutasítjuk H_0-t, szignifikáns eltérés H_0-tól.

$p \geq \alpha$ esetén elfogadjuk H_0-t, nincs szignifikáns eltérés H_0-tól, nem volt elég bizonyíték H_1-re.

A szokásos $\alpha = 0,05$ értékkel: $p < 0,05$ esetén **elutasítjuk a nullhipotézist, szignifikáns eltérés van**, különben elfogadjuk a nullhipotézist, nincs szignifikáns eltérés.

Nagy mintaelemszám esetén kis eltérés is szignifikáns. A próba ereje használható annak ellenőrzésére, hogy nem volt-e túl érzékeny az eljárás.

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$ (az átlag a centrális határeloszlás-tétel alapján közel normális eloszlású)

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$ (az átlag a centrális határeloszlás-tétel alapján közel normális eloszlású)

- ***z*-próba** (vagy u-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a σ szórás ismert**

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

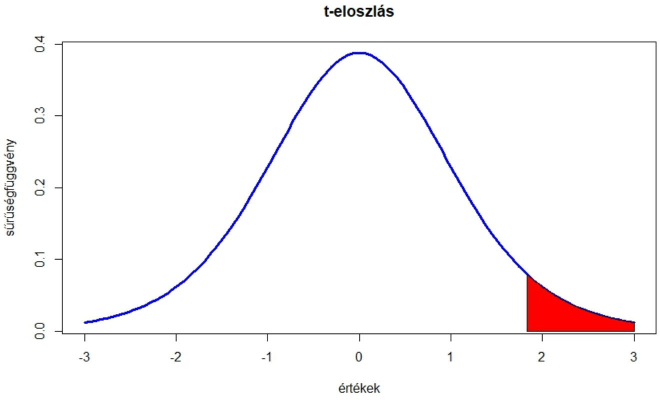
Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$ (az átlag a centrális határeloszlás-tétel alapján közel normális eloszlású)

- ***z*-próba** (vagy *u*-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a σ szórás ismert**
- ***t*-próba** (vagy Student-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a σ szórás nem ismert** (csak az s_n^* tapasztalati szórás)
- ***F*-próba**: **szórásra** vonatkozó hipotézis esetén

Kapcsolat a konfidenciaintervallummal: egymintás próbánál akkor fogadjuk el a nullhipotézist α terjedelem mellett, ha a benne megadott érték (várható érték vagy szórás) az $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumba esik.

t-eloszlás egyoldali kritikus értékei



Az $f = 9$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű egyoldali t-próba kritikus értéke: $\bar{t}_{9,0,05} = 1,83$.

Egymintás egyoldali t-próba (one-sample one-sided t-test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén – legerősebb próba.**
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m, σ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika, aminek eloszlása t-eloszlás H_0 mellett a Fisher–Bartlett-tétel szerint:
$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$
- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided): $H_0 : m \leq m_0$; $H_1 : m > m_0$.
- Ha $t > \bar{t}_{n-1,\alpha}$, azaz $p < \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist; ilyenkor a várható érték szignifikánsan több m_0-nál.
- Ha $t \leq \bar{t}_{n-1,\alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, elfogadjuk a nullhipotézist, a várható érték nem több szignifikánsan m_0-nál az adatok alapján.
- A kritikus érték: $\bar{t}_{n-1,\alpha}$ az $f = n - 1$ szabadsági fokú (degree of freedom) t-eloszlás $1 - \alpha$-kvantilise, vagyis az $f = n - 1$ szabadsági fokú egyoldali t-próba kritikus értéke α terjedelem (level of significance) mellett.

Példa: egymintás egyoldali t-próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351	370	352	340	362	363	366	355	374	347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

Példa: egymintás egyoldali t-próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351	370	352	340	362	363	366	355	374	347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \qquad \overline{X} = 358; \qquad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali *t*-próbát** alkalmazzuk: $H_0 : m \leq 50$; $H_1 : m > 50$.

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77} \sqrt{10} = 2,35.$$

Az $f = n - 1 = 9$ szabadsági fokú egyoldali t-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett $\overline{t}_{9;0,05} = 1,833$.

Példa: egymintás egyoldali t-próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351	370	352	340	362	363	366	355	374	347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \qquad \overline{X} = 358; \qquad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali t-próbát** alkalmazzuk: $H_0 : m \leq 50$; $H_1 : m > 50$.

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77}\sqrt{10} = 2,35.$$

Az $f = n - 1 = 9$ szabadsági fokú egyoldali t-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett $\overline{t}_{9;0,05} = 1,833$.

Mivel $t > \overline{t}_{9;0,05}$, **elutasítjuk a nullhipotézist**, a vízkeménység szignifikánsan meghaladja 350 mg/l határértéket. A p-érték: $p = 0,0217 < 0,05.$

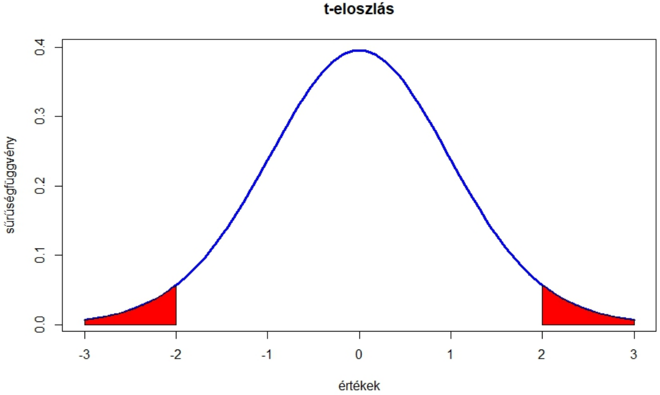
Egymintás kétoldali t-próba (one-sample two-sided t-test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén.** Nem legerősebb (nincs ilyen).
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m, σ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika (eloszlása t-eloszlás/Student-eloszlás H_0 mellett):

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided): $H_0 : m = m_0$; $\qquad H_1 : m \neq m_0$.
- Ha $|t| > t_{n-1,\alpha}$, azaz $p < \alpha$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, a várható érték szignifikánsan eltér m_0-tól.
- Ha $|t| \leq t_{n-1,\alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, akkor elfogadjuk H_0-t, a várható érték nem tér el szignifikánsan m_0-tól.
- A kritikus érték: $t_{n-1,\alpha}$ az $f = n - 1$ szabadsági fokú (degree of freedom) t-eloszlás $1 - \alpha/2$-kvantilise, vagyis az $f = n - 1$ szabadsági fokú (degree of freedom) kétoldali t-próba kritikus értéke α terjedelem (level of significance) mellett.

Kétoldali t-próba kritikus értékei



Az $f = 59$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali t-próba kritikus értéke: $t_{29;0,05} = 2,04$.

Példa: Egymintás kétoldali t-próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tabletta hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga $9,8$, korrigált tapasztalati szórása $0,62$ lett. A szignifikanciaszintet $\alpha = 0,05$-nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

Példa: Egymintás kétoldali t-próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tabletta hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga $9,8$, korrigált tapasztalati szórása $0,62$ lett. A szignifikanciaszintet $\alpha = 0,05$-nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

$$n = 30; \qquad \overline{X} = 9,8; \qquad s_n^* = 0,62$$

Egymintás kétoldali t-próbát végezhetünk, normális eloszlást feltételezve.

$$H_0 : m = 10; \qquad H_1 : \neq 10; \qquad \alpha = 0,05; \qquad f = n - 1 = 29.$$

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{9,8 - 10}{0,62} \cdot \sqrt{30} = -1,77.$$

A kritikus érték: $t_{29,0,05} = 2,045 \Rightarrow |t| = 1,77 \leq 2,045$, nincs szignifikáns eltérés.
p-érték: $p = 0,0867 \geq 0,05$.