Abszolút folytonos valószínűségi változó (4. előadás)

Definíció (Abszolút folytonosság és sűrűségfüggvény)

Az X valószínűségi változó **abszolút folytonos**, *ha van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre*

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(s) ds$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra. Ilyenkor az f függvényt az X valószínűségi változó **sűrűségfüggvényének** *nevezzük.*

Abszolút folytonos valószínűségi változó (4. előadás)

Definíció (Abszolút folytonosság és sűrűségfüggvény)

Az X valószínűségi változó **abszolút folytonos**, *ha van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre*

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(s) ds$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra. Ilyenkor az f függvényt az X valószínűségi változó **sűrűségfüggvényének** *nevezzük.*

Állítás

Legyen az X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f. Ekkor tetszőleges $a < b$ számokra teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(s) ds.$$

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Állítás (Az eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény kapcsolata)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek F az eloszlásfüggvénye.
(a) Ha f az X sűrűségfüggvénye, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ számra

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds.$$

(b) Az $f(t) = F'(t)$ függvény (azokra a t-kre, ahol F differenciálható) az X sűrűségfüggvénye.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Állítás (Az eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény kapcsolata)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek F az eloszlásfüggvénye.
(a) Ha f az X sűrűségfüggvénye, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ számra

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds.$$

(b) Az $f(t) = F'(t)$ függvény (azokra a t-kre, ahol F differenciálható) az X sűrűségfüggvénye.

Állítás (A sűrűségfüggvény jellemzése)

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor sűrűségfüggvénye valamilyen valószínűségi változónak, ha

(i) *$f(s) \geq 0$ teljesül „majdnem minden” $s \in \mathbb{R}$-re (például véges vagy megszámlálható sok kivétel lehetséges).*

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds = 1.$

Várható érték és szórás

Definíció (Várható érték, abszolút folytonos eset)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f. Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s)ds, \text{ ha } \int_{-\infty}^{\infty} |s| \cdot f(s)ds < \infty.$$

Várható érték és szórás

Definíció (Várható érték, abszolút folytonos eset)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f. Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds, \text{ ha } \int_{-\infty}^{\infty} |s| \cdot f(s) ds < \infty.$$

Definíció (Szórásnégyzet és szórás)

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye f. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right],$$

szórása pedig (ha $\mathbb{E}(X^2)$ létezik)

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]}.$$

Szórásnégyzet és szórás

Definíció (Szórásnégyzet és szórás)

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye f. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big],$$

szórása pedig

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big]},$$

ha ezek a várható értékek léteznek.

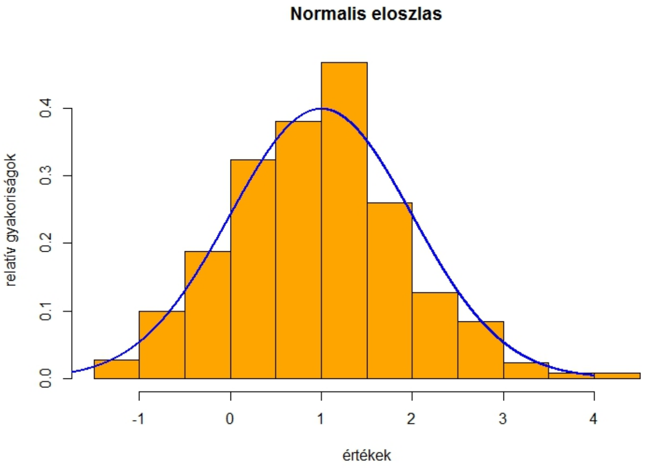
Állítás (A szórásnégyzet kiszámítása)

A szórásnégyzetet a következőképpen számíthatjuk ki abszolút folytonos X valószínűségi változó esetén:

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big[\mathbb{E}(X)\big]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 f(s) ds - \left[\int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds\right]^2,$$

ahol f az X sűrűségfüggvénye.

Normális eloszlás



A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye és 500 elemű minta hisztogramja

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Legyen m valós, σ pedig pozitív szám. Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó **normális eloszlású** *m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, ha sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Jelölése: $Y \sim N(m, \sigma^2)$.

Normális eloszlás

Definíció (Normális eloszlás)

Legyen m valós, σ pedig pozitív szám. Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó **normális eloszlású** *m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, ha sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

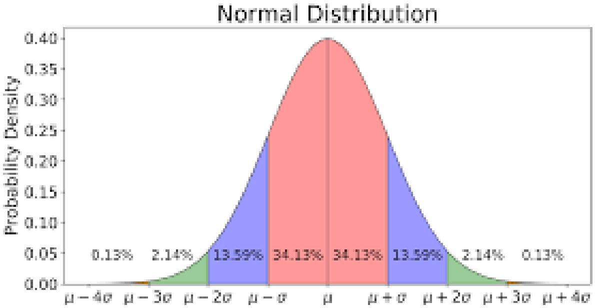
Jelölése: $Y \sim N(m, \sigma^2)$.

Ha $Y \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}(Y) = m$, $D(Y) = \sigma$.

Standard normális eloszlás: $m = 0$ várható értékű és $\sigma = 1$ szórású normális eloszlás. Eloszlásfüggvénye: Φ, sűrűségfüggvénye:

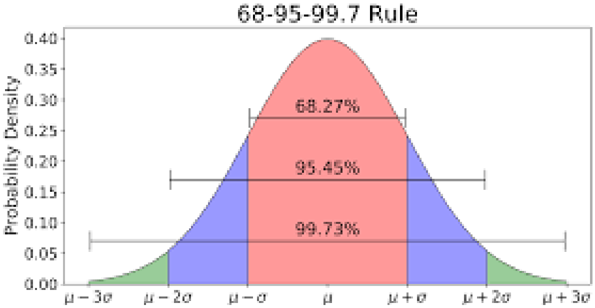
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right).$$

Normális eloszlás



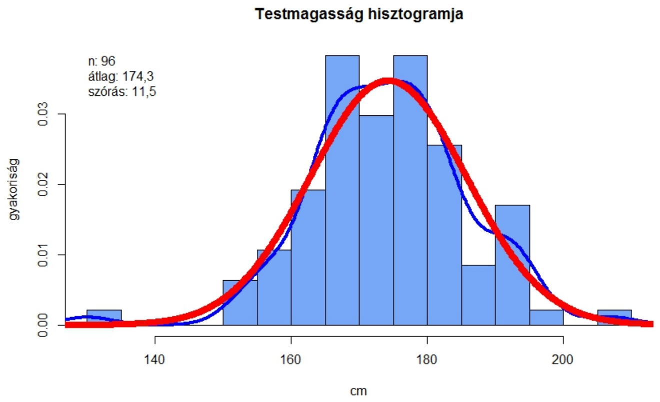
A normális eloszlás sűrűségfüggvénye és annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó az $(m-4\sigma, m-3\sigma), (m-3\sigma, m-2\sigma), \ldots, (m+3\sigma, m+4\sigma)$ intervallumokba esik (forrás: towardsdatascience.com)

Normális eloszlás



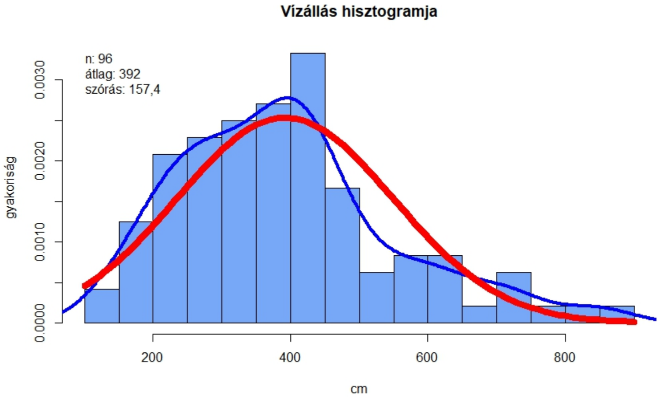
A normális eloszlás sűrűségfüggvénye és annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó az $(m - 3\sigma, m + 3\sigma), (m - 2\sigma, m + 2\sigma), (m - \sigma, m + \sigma)$ intervallumokba esik (forrás: towardsdatascience.com)

Testmagasság



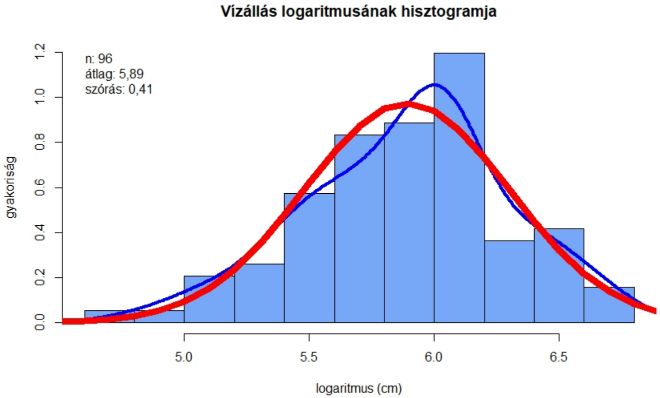
Testmagasság hisztogramja $n = 96$ elemű mintából, és az $\overline{X} = 174,3$ várható értékű és $s_n^* = 11,5$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (pirossal)

A Duna vízállása



A Duna havi legnagyobb vízállásának hisztogramja (2002–2009, $n = 96$, forrás: Országos Vízjelző Szolgálat), és az $\overline{X} = 392$ várható értékű és $s_n^* = 157,4$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (piros): nem illeszkedik jól a normális eloszlás

A Duna vízállása



A Duna havi legnagyobb vízállásának **logaritmusának** hisztogramja (2002–2009, $n = 96$, forrás: Országos Vízjelző Szolgálat), és az $\overline{X} = 5,89$ várható értékű és $s_n^* = 0,41$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye: jobban illeszkedik, a vízállás logaritmusa lehet normális eloszlású (vagyis a vízállás lehet **lognormális eloszlású**)

A normális eloszlás tulajdonságai

Tegyük fel, hogy Y normális eloszlású m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számokra

- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds.$
- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(Y < b) = \mathbb{P}(Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(a < Y) = \mathbb{P}(a \leq Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = 1 - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$

A normális eloszlás tulajdonságai

Tegyük fel, hogy Y normális eloszlású m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számokra

- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds.$
- $\mathbb{P}(a < Y < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(Y < b) = \mathbb{P}(Y \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^b \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right).$
- $\mathbb{P}(a < Y) = \mathbb{P}(a \leq Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^\infty \exp\left(-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right) ds = 1 - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$
- Az $aY + b$ valószínűségi változó normális eloszlású $am + b$ várható értékkel és $a^2\sigma^2$ szórásnégyzettel.

Példa: normális eloszlás

Példa. Tegyük fel, hogy az Y valószínűségi változó normális eloszlású $m = 4$ várható értékkel és $\sigma = 3$ szórással. Ekkor

$$\mathbb{P}(Y \leq 7) = \Phi\left(\frac{7-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{7-4}{3}\right) = \Phi(1) = 0,84.$$

Példa: normális eloszlás

Példa. Tegyük fel, hogy az Y valószínűségi változó normális eloszlású $m = 4$ várható értékkel és $\sigma = 3$ szórással. Ekkor

$$\mathbb{P}(Y \leq 7) = \Phi\left(\frac{7-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{7-4}{3}\right) = \Phi(1) = 0,84.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 < Y \leq 7) = \mathbb{P}(Y \leq 7) - \mathbb{P}(Y \leq 1) &= \Phi\left(\frac{7-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1-m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{7-4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-4}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0,68.\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy a standard normális eloszlás szimmetriája miatt

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

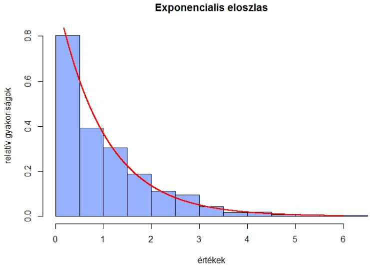
teljesül minden x-re.

Exponenciális eloszlás

Definíció (Exponenciális eloszlás)

Legyen $\lambda > 0$ valós szám. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(s) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda s}, & \text{ha } s > 0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



Exp(1) sűrűségfüggvénye és 500 elemű minta hisztogramja.

Az exponenciális eloszlás tulajdonságai

Állítás

Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel. Ekkor a következők teljesülnek.

(i) *X eloszlásfüggvénye:*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda s}, & \text{ha } s > 0; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

(ii) *X várható értéke: $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, szórása: $D(X) = 1/\lambda$.*

(iii) **Örökifjú tulajdonság.** *Legyenek s, t pozitív számok. Ekkor*

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

Példa. Radioaktív részecske bomlási ideje, kiszolgálási vagy feldolgozási idő.

Exponenciális eloszlás: példa

Egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje legyen az X valószínűségi változó, és tegüyk fel, hogy ez percben számolva 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt legalább 5 percig tart kiszolgálni?

Exponenciális eloszlás: példa

Egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje legyen az X valószínűségi változó, és tegüyk fel, hogy ez percben számolva 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt legalább 5 percig tart kiszolgálni?

Mivel exponenciális eloszlás esetén $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, most $\lambda = 1/3$ lesz. Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye alapján

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} = e^{-5/3} = 0,189.$$

Exponenciális eloszlás: példa

Egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje legyen az X valószínűségi változó, és tegüyk fel, hogy ez percben számolva 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt legalább 5 percig tart kiszolgálni?

Mivel exponenciális eloszlás esetén $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, most $\lambda = 1/3$ lesz. Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye alapján

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} = e^{-5/3} = 0,189.$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása legalább 2, de legfeljebb 4 percig tart?

Exponenciális eloszlás: példa

Egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje legyen az X valószínűségi változó, és tegüyk fel, hogy ez percben számolva 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt legalább 5 percig tart kiszolgálni?

Mivel exponenciális eloszlás esetén $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, most $\lambda = 1/3$ lesz. Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye alapján

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} = e^{-5/3} = 0,189.$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása legalább 2, de legfeljebb 4 percig tart?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X \leq 2) = F(4) - F(2) = \\ &= (1 - e^{-4/3}) - (1 - e^{-2/3}) = e^{-2/3} - e^{-4/3} = 0,25.\end{aligned}$$

Függetlenség

Definíció (Véges eset)

Azt mondjuk, hogy az $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változók* **függetlenek**, *ha*

$$\mathbb{P}(X_1 \le t_1, X_2 \le t_2, \dots, X_n \le t_n) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \le t_2) \dots \mathbb{P}(X_n \le t_n)$$

teljesül tetszőleges $t_1, t_2, \dots, t_n$ *valós számokra, azaz*

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) = F_1(t_1) \cdot F_2(t_2) \cdot \dots F_n(t_n),$$

ahol F_j *az* X_j *valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.*

Definíció (Végtelen eset)

Az $X_1, X_2, X_3 \dots$ *valószínűségi változók függetlenek, ha közülük bármely véges sokat kiválasztva független valószínűségi változókat kapunk.*

Függetlenség

Független valószínűségi változókra példa:

- Két kockadobásnál az elsőként (X_1) és másodikként dobott szám (X_2).
- A holnapi csapadékmennyiség Budapesten és New Yorkban.
- Két találomra választott ember testmagassága.

Nem független valószínűségi változókra példa:

- Két kockadobásnál az első szám és a két dobott szám összege.
- A holnapi csapadékmennyiség Budapesten és Budaörsön.
- Két testvér testmagassága.

Függetlenség: egész értékű valószínűségi változók

Állítás (Egész értékű eset)

Az $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{Z}$ *valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha*

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n) = \mathbb{P}(X_1 = k_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = k_2) \ldots \mathbb{P}(X_n = k_n)$$

teljesül tetszőleges $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *egész számokra.*

Példa: két szabályos dobókockával dobunk, legyen X_1 az elsőként dobott szám, X_2 a másodikként dobott szám.

$$\mathbb{P}(X_1 = 4, X_2 = 3) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(X_1 = 4)\mathbb{P}(X_2 = 3),$$

hasonlóképpen tetszőleges $1 \leq k_1 \leq 6$, $1 \leq k_2 \leq 6$ egészekre

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(X_1 = k_1)\mathbb{P}(X_2 = k_2),$$

Függetlenség: egész értékű valószínűségi változók

Állítás (Egész értékű eset)

Az $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{Z}$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = \mathbb{P}(X_1 = k_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = k_2) \dots \mathbb{P}(X_n = k_n)$$

teljesül tetszőleges $k_1, k_2, \dots, k_n$ egész számokra.

Példa: két szabályos dobókockával dobunk, legyen X_1 az elsőként dobott szám, X_2 a másodikként dobott szám.

$$\mathbb{P}(X_1 = 4, X_2 = 3) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(X_1 = 4)\mathbb{P}(X_2 = 3),$$

hasonlóképpen tetszőleges $1 \leq k_1 \leq 6$, $1 \leq k_2 \leq 6$ egészekre

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(X_1 = k_1)\mathbb{P}(X_2 = k_2),$$

vagyis X_1 és X_2 függetlenek. Viszont

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_1 + X_2 = 12) = 0 \neq \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 12) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36},$$

vagyis X_1 és $X_1 + X_2$ nem függetlenek.

Független valószínűségi változók összege

Legyenek $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ **független azonos eloszlású** valószínűségi változók (azonos eloszlás: $\mathbb{P}(X_j \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)$ minden t-re, ebből $\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}(X_1)$ és $D(X_j) = D(X_1)$ következik). Mit mondhatunk az átlag viselkedéséről?

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Független valószínűségi változók összege

Legyenek $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ **független azonos eloszlású** valószínűségi változók (azonos eloszlás: $\mathbb{P}(X_j \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)$ minden t-re, ebből $\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}(X_1)$ és $D(X_j) = D(X_1)$ következik). Mit mondhatunk az átlag viselkedéséről?

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

- Ha X_1, X_2 függetlenek, normális eloszlásúak, akkor $X_1 + X_2$ is normális eloszlású, várható értékük és szórásnégyzetük is összeadódik
- Ha $X_j \sim N(m, \sigma^2)$ függetlenek, normális eloszlásúak, akkor $\sum_{j=1}^{n} X_j \sim N(nm, n\sigma$ szintén normális eloszlású, és $\overline{X} \sim N(m, \sigma^2/n)$ is normális eloszlású
- Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek, Poisson-eloszlásúak $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ paraméterekkel, akkor $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ is Poisson-eloszlású $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ paraméterrel

A várható érték tulajdonságai

- (összeg várható értéke) Ha X, Y valószínűségi változók, és $X, Y, X+Y$ várható értéke létezik, akkor
$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$
- (konstans kiemelése) Ha az X valószínűségi változó várható értéke létezik, és c tetszőleges valós szám, akkor
$$\mathbb{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathbb{E}(X).$$
- (szorzat várható értéke független esetben) Ha az X és Y valószínűségi változók **függetlenek**, és $X, Y, X \cdot Y$ várható értéke létezik, akkor
$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$
- (függvény várható értéke) Ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\mathbb{E}(X)$ létezik, akkor
$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i), \qquad \mathbb{P}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\, dt$$
ahol az X lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, ha X diszkrét, és X sűrűségfüggvénye f, ha X abszolút folytonos.

A szórásnégyzet tulajdonságai

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

- (nemnegativitás) $D^2(X) \geq 0$ és $D(X) \geq 0$ mindig teljesül
- (szorzás és eltolás) ha a, b valós számok, X véges szórású valószínűségi változó, akkor

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X) \quad \Rightarrow \quad D(aX + b) = |a| D(X).$$

A szórásnégyzet tulajdonságai

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

- (nemnegativitás) $D^2(X) \geq 0$ és $D(X) \geq 0$ mindig teljesül
- (szorzás és eltolás) ha a, b valós számok, X véges szórású valószínűségi változó, akkor

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X) \quad \Rightarrow \quad D(aX + b) = |a| D(X).$$

- (összeg szórása független esetben) ha az X, Y valószínűségi változók **függetlenek** és szórásuk létezik, akkor

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) \quad \Rightarrow \quad D(X + Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)}.$$

- van olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke véges, de a szórása nem létezik (például: $\mathbb{P}(X = k) = c/k^3$ megfelelő c-vel)

Az átlag várható értéke

Állítás

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre* $\mathbb{E}(X_1) < \infty$. *Ekkor*

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X_1).$$

Az átlag várható értéke

Állítás

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre* $\mathbb{E}(X_1) < \infty$*. Ekkor*

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X_1).$$

Bizonyítás.

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_1).$$

Felhasználtuk a várható érték linearitását, és hogy csak eloszlástól függ:

- $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$, ha $c \in \mathbb{R}$;
- $\mathbb{E}(Y + Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z)$;
- ha Y és Z eloszlása (azaz eloszlásfüggvényük) megegyezik, akkor $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z)$

Az átlag szórása

Állítás

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre* $\sigma = D(X_1) < \infty$. *Ekkor*

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)}{\sqrt{n}}.$$

Az átlag szórása

Állítás

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre* $\sigma = D(X_1) < \infty$. *Ekkor*

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)}{\sqrt{n}}.$$

Bizonyítás.

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1 + \ldots + X_n)}{n} = \frac{\sqrt{nD^2(X_1)}}{n} = \frac{D(X_1)}{\sqrt{n}}.$$

Felhasználtuk a szórás alábbi tulajdonságait:

- $D(cX) = |c|D(X)$, ha $c \in \mathbb{R}$;
- $D^2(Y + Z) = D^2(Y) + D^2(Z)$, ha Y és Z függetlenek;
- ha Y és Z eloszlása megegyezik, akkor $D(Y) = D(Z)$