Feltételes valószínűség (3. előadás)

Példa: Gábornak három gyereke van. Feltéve, hogy pontosan egy fia van, mennyi a valószínűsége, hogy a középső gyermeke fiú?

Feltételes valószínűség (3. előadás)

Példa: Gábornak három gyereke van. Feltéve, hogy pontosan egy fia van, mennyi a valószínűsége, hogy a középső gyermeke fiú?

A: a középső gyerek fiú; B: pontosan egy fiú van.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{a középső fiú}) = \frac{1}{2}.$$

A $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget így számolhatjuk ki:

$$\mathbb{P}(\text{a középső fiú}|\text{egy fiú van}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(LFL)}{\mathbb{P}(FLL, LFL, LLF)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = 1/3.$$

Feltételes valószínűség (3. előadás)

Példa: Gábornak három gyereke van. Feltéve, hogy pontosan egy fia van, mennyi a valószínűsége, hogy a középső gyermeke fiú?

A: a középső gyerek fiú; B: pontosan egy fiú van.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{a középső fiú}) = \frac{1}{2}.$$

A $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget így számolhatjuk ki:

$$\mathbb{P}(\text{a középső fiú}|\text{egy fiú van}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(LFL)}{\mathbb{P}(FLL, LFL, LLF)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = 1/3.$$

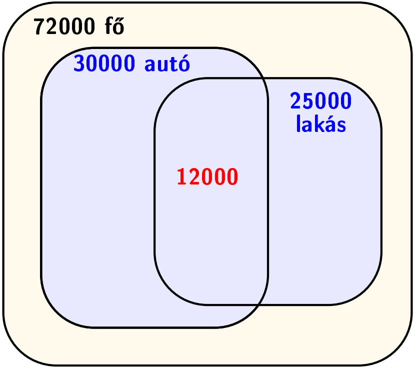
Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

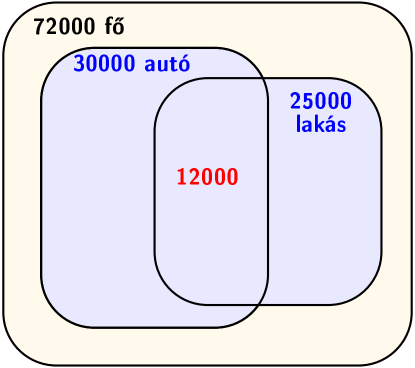
Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnek van lakása?



Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnek van lakása?



$$\mathbb{P}(L|A) = \frac{\mathbb{P}(L \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{12000/72000}{30000/72000} = \frac{12000}{30000} = 40\% > \mathbb{P}(L) = \frac{25000}{72000} = 34,7\%.$$

Bayes-tétel: példa

Példa. Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0 (B_1)	$0-5$ (B_2)	$5-10$ (B_3)	10-nél több (B_4)
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

- Mennyi annak valószínűsége, hogy holnap beázik Hanna sátra?
- Másnap Hanna a beázott sátorról küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban több mint 10 mm eső esett ezen a napon?

Bayes-tétel: példa

Példa. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be Hanna sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége. Mennyi a valószínűsége, hogy beázik a sátra?

csapadék (mm)	nincs (B_1)	$0-5$ (B_2)	$5-10$ (B_3)	>10 (B_4)
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

A: Hanna sátra beázik. A B_1, B_2, B_3, B_4 események közül pontosan az egyik következik be (a B_2-t úgy értve, hogy van csapadék, de nem több 5 mm-nél) – ez egy **teljes eseményrendszer**. A **teljes valószínűség tétele** szerint:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) \\ &= 0 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,24 = 24\%.\end{aligned}$$

Vagyis Hanna sátra 24% valószínűséggel ázik be.

Bayes-tétel: példa

Példa. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be Hanna sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0 (B_1)	$0-5$ (B_2)	$5-10$ (B_3)	10-nél több (B_4)
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Már láttuk, hogy $\mathbb{P}(A) > 0$, B_1, B_2, B_3, B_4 pedig továbbra is teljes eseményrendszer. Alkalmazhatjuk **Bayes tételét**:

$$\mathbb{P}(B_4|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)} =$$

$$= \frac{0,6 \cdot 0,2}{0 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2} = \frac{0,12}{0,24} = 50\%.$$

Vagyis feltéve, hogy beázott a sátor, 50% valószínűséggel volt 10 mm-nél több csapadék.

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *(véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha*

(i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, *azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;*

(ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *teljesül minden* $1 \le i < j$*-re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;*

(iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ *minden* $i = 1, 2, \ldots$*-re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.*

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *(véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha*

(i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, *azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;*

(ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *teljesül minden* $1 \leq i < j$*-re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;*

(iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ *minden* $i = 1, 2, \ldots$*-re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.*

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ *tetszőleges esemény,* $B_1, B_2, \ldots$ *pedig teljes eseményrendszer. Ekkor*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j).$$

Bayes-tétel

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, $B_1, B_2, \ldots$ pedig teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j).$$

Tétel (Bayes-tétel)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(A) > 0$, $B_1, B_2, \ldots$ pedig teljes eseményrendszer. Ekkor minden $k = 1, 2, \ldots$-re teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \ldots} = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}.$$

Szimmetrikus bolyongás

Tönkremenési feladat. Lolának kezdetben 0 forintja van. A kaszinóban minden körben (a korábbiaktól függetlenül) $1/2$ valószínűséggel nyer egy forintot, $1/2$ valószínűséggel veszít egy forintot. Ha a nyereménye eléri az 1000 forintot, vagy az adóssága a 200-t, be kell fejeznie a játékot. Mennyi a valószínűsége, hogy Lola nyer a játék végén, és nem adóssággal távozik?

Szimmetrikus bolyongás

Tönkremenési feladat. Lolának kezdetben 0 forintja van. A kaszinóban minden körben (a korábbiaktól függetlenül) 1/2 valószínűséggel nyer egy forintot, 1/2 valószínűséggel veszít egy forintot. Ha a nyereménye eléri az 1000 forintot, vagy az adóssága a 200-t, be kell fejeznie a játékot. Mennyi a valószínűsége, hogy Lola nyer a játék végén, és nem adóssággal távozik?

A nullából indulva minden lépésben a korábbiaktól függetlenül 1/2 valószínűséggel felfelé, 1/2 valószínűséggel lefelé lépünk egyet a számegyenesen.

- Mennyi a valószínűsége, hogy n lépés után éppen az k számban vagyunk?
- Mennyi a valószínűsége, hogy az $a > 0$ számot hamarabb érjük el, mint a $b < 0$ számot?
- Mennyi a valószínűsége, hogy végtelen sokszor visszatérünk a 0-ba?

Szimmetrikus bolyongás

Annak valószínűsége, hogy n lépés után éppen a k számra érünk:

$$\begin{cases} \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{(n-k)/2}, & \text{ha } n-k \text{ páros;} \\ 0, & \text{ha } n-k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Összesen 2^n lehetséges útvonal van n lépés során, ezek egyformán valószínűek. Közülük $\binom{n}{(n-k)/2}$ érkezik k-ba.

Szimmetrikus bolyongás

Annak valószínűsége, hogy n lépés után éppen a k számra érünk:

$$\begin{cases} \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{(n-k)/2}, & \text{ha } n-k \text{ páros;} \\ 0, & \text{ha } n-k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Összesen 2^n lehetséges útvonal van n lépés során, ezek egyformán valószínűek. Közülük $\binom{n}{(n-k)/2}$ érkezik k-ba.

Megjegyzés. A nullába 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatérünk. Ugyanez érvényes a $\mathbb{Z}^2$-en való bolyongásra is, de $\mathbb{Z}^d$-re nem, ha $d \geq 3$: ilyenkor annak valószínűsége, hogy valaha visszatérünk a nullába, egynél kisebb pozitív szám. (Pólya-tétel)

Szimmetrikus bolyongás

Annak valószínűsége, hogy sem a-t, sem b-t nem érjük el a bolyongás során (a, b egészek): 0.

$a > 0 > b$ egészek. Legyen p_k annak valószínűsége, hogy a k-ból indulva hamarabb érjük el a-t, mint b-t. A teljes valószínűség tétele alapján:

$$p_k = \frac{1}{2} \cdot p_{k-1} + \frac{1}{2} \cdot p_{k+1} \qquad (b < k < a).$$

Továbbá $p_b = 0$ és $p_a = 1$. A lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$p_k = \frac{k-b}{a-b} \qquad \Rightarrow \qquad p_0 = \frac{-b}{a-b}.$$

Vagyis: Lolának

$$p_0 = \frac{-(-200)}{1000-(-200)} = \frac{200}{1200} = \frac{1}{6} = 16,67\%$$

esélye van a győzelemre.

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó. Ekkor* X *eloszlásfüggvénye az alábbi* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *függvény:*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \qquad \textit{minden } t \in \mathbb{R} \textit{ valós számra.}$$

Állítás

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, *és* F *az* X *eloszlásfüggvénye, akkor*

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó. Ekkor* X *eloszlásfüggvénye az alábbi* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *függvény:*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \qquad \textit{minden } t \in \mathbb{R} \textit{ valós számra.}$$

Állítás

Ha $a, b \in \mathbb{R}$*, és* F *az* X *eloszlásfüggvénye, akkor*

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Állítás (Az eloszlásfüggvény tulajdonságai)

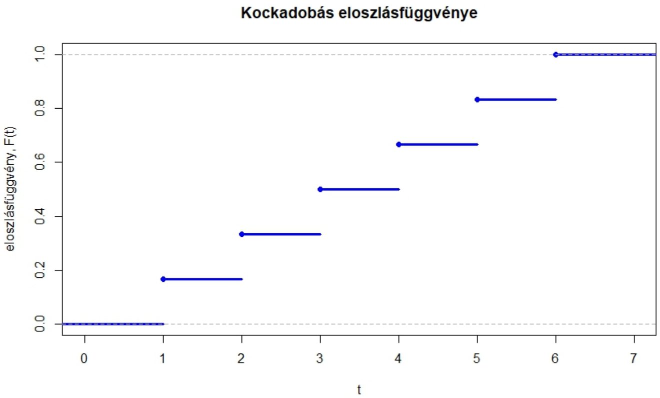
Legyen X *valószínűségi változó,* F *pedig az eloszlásfüggvénye. Ekkor*

(i) F *monoton növő:* $a < b$ *esetén* $F(a) \leq F(b)$*.*

(ii) $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0; \qquad \lim_{t \to \infty} F(t) = 1.$

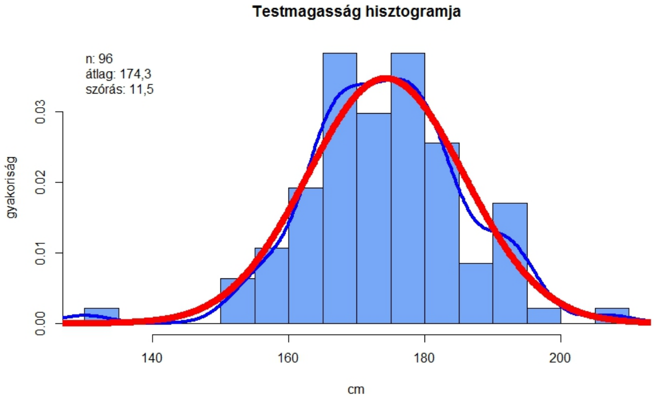
(iii) F *jobbról folytonos, azaz minden* $t \in \mathbb{R}$ *valós számra* $\lim_{s \to t-} F(s) = F(t)$*.*

Példa: eloszlásfüggvény



ábra: Szabályos dobókockával dobott szám eloszlásfüggvénye.

Testmagasság



Testmagasság hisztogramja $n = 96$ elemű mintából, és az $\overline{X} = 174,3$ várható értékű és $s_n^* = 11,5$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (pirossal)

Abszolút folytonos valószínűségi változó

Definíció (Abszolút folytonosság és sűrűségfüggvény)

Az X valószínűségi változó **abszolút folytonos***, ha van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre*

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra. Ilyenkor az f függvényt az X valószínűségi változó **sűrűségfüggvényének** *nevezzük.*

Abszolút folytonos valószínűségi változó

Definíció (Abszolút folytonosság és sűrűségfüggvény)

Az X valószínűségi változó **abszolút folytonos**, *ha van olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre*

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra. Ilyenkor az f függvényt az X valószínűségi változó **sűrűségfüggvényének** *nevezzük.*

Állítás

Legyen az X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f. Ekkor tetszőleges $a < b$ számokra teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(s)ds.$$

Várható érték és szórás

Definíció (Várható érték, abszolút folytonos eset)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f. Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds, \text{ ha } \int_{-\infty}^{\infty} |s| \cdot f(s) ds < \infty.$$

Várható érték és szórás

Definíció (Várható érték, abszolút folytonos eset)

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f. Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds, \;\; ha \;\; \int_{-\infty}^{\infty} |s| \cdot f(s) ds < \infty.$$

Definíció (Szórásnégyzet és szórás)

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye f. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right],$$

szórása pedig (ha $\mathbb{E}(X^2)$ létezik)

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]}.$$

Szórásnégyzet és szórás

Definíció (Szórásnégyzet és szórás)

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye f. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right],$$

szórása pedig

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]},$$

ha ezek a várható értékek léteznek.

Állítás (A szórásnégyzet kiszámítása)

A szórásnégyzetet a következőképpen számíthatjuk ki abszolút folytonos X valószínűségi változó esetén:

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 f(s) ds - \left[\int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds\right]^2,$$

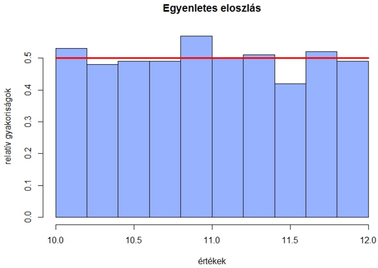
ahol f az X sűrűségfüggvénye.

Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás)

Legyenek $a < b$ valós számok. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



$U(10, 12)$ sűrűségfüggvény és 500 elemű minta hisztogramja.

Egyenletes eloszlás

Állítás (Az egyenletes eloszlás tulajdonságai)

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor a következők teljesülnek.

(i) *X eloszlásfüggvénye:*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0, & ha\ t \leq a; \\ \frac{t-a}{b-a}, & ha\ a < t < b; \\ 1, & ha\ t \geq b. \end{cases}$$

(ii) *Ha $a \leq c \leq d \leq b$, akkor*

$$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(s) ds = \int_c^d \frac{1}{b-a} ds = \frac{d-c}{b-a}.$$

(iii) *Az X valószínűségi változó várható értéke és szórása:*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}; \qquad D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Példa: egyenletes eloszlás

Példa. Csomagot várunk, a futár 10 és 12 óra között érkezik. Feltesszük, hogy érkezésének időpontja egyenletes eloszlású a $[10, 12]$ intervallumon. Ekkor az előző állítás alapján az alábbiak igazak ($a = 10$, $b = 12$).

- Annak valószínűsége, hogy 10 és 11 óra között érkezik: $(11 - 10)/(12 - 10) = 1/2$.
- Annak valószínűsége, hogy 10:15 és 10:30 között érkezik, $1/8 = 0,125$.
- Érkezési időpontjának várható értéke: $(10 + 12)/2 = 11$ óra.
- Érkezési időpontjának szórása: $(12 - 10)/\sqrt{12} = 1/\sqrt{3} = 0,5774$.

Az egyenletes eloszlás várható értéke

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds = \int_a^b s \cdot \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} \left[\frac{s^2}{2} \right]_{s=a}^{b} =$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2},$$

hiszen az x függvény primitív függvénye $\frac{x^2}{2}$, és $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$.

Az egyenletes eloszlás szórása

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor várható értéke

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \cdot f(s) ds = \int_a^b s^2 \cdot \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} \left[\frac{s^3}{3} \right]_{s=a}^{b}$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

hiszen az x^2 függvény primitív függvénye $\frac{x^3}{3}$, és $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$.

Az egyenletes eloszlás szórása

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor várható értéke

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \cdot f(s) ds = \int_a^b s^2 \cdot \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} \left[\frac{s^3}{3} \right]_{s=a}^{b}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

hiszen az x^2 függvény primitív függvénye $\frac{x^3}{3}$, és $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$.

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$