Valószínűségi változó (2. előadás)

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény valószínűségi változó, ha tetszőleges* $a < b$ *valós számokra*

$$\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}.$$

Valószínűségi változó (2. előadás)

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény valószínűségi változó, ha tetszőleges $a < b$ valós számokra

$$\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}.$$

Példa. Valakinek három gyereke születik. Legyen X a fiúk száma. Ekkor

$$\Omega = \{FFF, FFL, FLF, FLL, LFF, LFL, LLF, LLL\};$$

$$X(LLL) = 0; \qquad X(LLF) = X(LFL) = X(FLL) = 1;$$

$$X(FFL) = X(FLF) = X(LFF) = 2; \qquad X(FFF) = 3.$$

Ekkor $\mathbb{P}(X = 0) = 1/8, \mathbb{P}(X = 1) = 3/8, \mathbb{P}(X = 2) = 3/8, \mathbb{P}(X = 3) = 1/8$.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlása

Példa: három gyerek. Az előző példában: háromszor gyerek születik, X a fiúk száma, mind a $2^3 = 8$ lehetőség egyformán valószínű.

Ekkor X lehetséges értékei: $0, 1, 2, 3$.

$\mathbb{P}(X = 0) = 1/8; \quad \mathbb{P}(X = 1) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 2) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/8.$

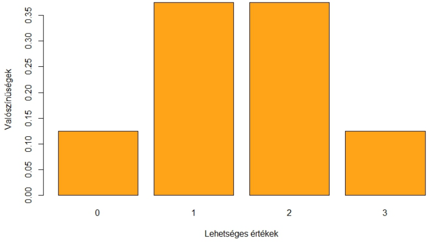
Mindezek alapján X eloszlása az alábbi (x_i, p_i) sorozat:

$$(0, 1/8), \qquad (1, 3/8), \qquad (2, 3/8), \qquad (3, 1/8).$$

Példa: szabályos kockadobás. Egyszer dobunk szabályos dobókockával, jelölje Y a dobott számot. Ekkor Y eloszlása az alábbi (x_i, p_i) sorozat:

$(1, 1/6), \qquad (2, 1/6), \qquad (3, 1/6), \qquad (4, 1/6), \qquad (5, 1/6), \qquad (6, 1/6).$

Példa: a gyerekek számának eloszlása



A fiúk számának lehetséges értékei a három gyerek közül és a hozzájuk tartozó valószínűségek:

$$(0, 1/8); \qquad (1, 3/8); \qquad (2, 3/8); \qquad (3, 1/8).$$

Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása* $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots$. *Ekkor* X *várható értéke:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \qquad \textit{ha} \;\; \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása* $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots$. *Ekkor* X *várható értéke:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \qquad \textit{ha} \;\; \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Példa: három gyerek. Legyen X a fiúk száma a három gyerek közül. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Példa: szabályos kockadobás. Legyen Y egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

A várható érték tulajdonságai

- (összeg várható értéke) Ha X, Y valószínűségi változók, és $X, Y, X+Y$ várható értéke létezik, akkor
$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$
- (konstans kiemelése) Ha az X valószínűségi változó várható értéke létezik, és c tetszőleges valós szám, akkor
$$\mathbb{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathbb{E}(X).$$
- (függvény várható értéke) Ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\mathbb{E}(X)$ létezik, akkor
$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i),$$
ahol az X lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$.

Valószínűségi változó szórása

Lehetséges motiváció: nem mindegy, hogy a buszok ütemesen (szabályosan) tíz percenként érkeznek, vagy a követési idő várható értéke tíz perc, de hol öt, hol tizenöt percenként jönnek; egy mérőeszköztől a mérési hiba, vagyis a mérés bizonytalansága is fontos, például nem mindegy, hogy adott pontosság eléréséhez hány mérést kell átlagolni.

Definíció (Szórás)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X **szórásnégyzete** *(varianciája):*

$$D^2(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big) = \mathbb{E}(X^2) - \big[\mathbb{E}(X)\big]^2.$$

Ebben az esetben X **szórása** *(standard deviation):*

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \big[\mathbb{E}(X)\big]^2}.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.$$

Állítás (A szórás kiszámítása egész értékek esetén)

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik, és melynek lehetséges értékei nemnegatív egészek. Ekkor

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k)\right]^2.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Legyen továbbra is X a fiúk száma három gyerek közül:

$\mathbb{P}(X=0)=1/8; \quad \mathbb{P}(X=1)=3/8; \quad \mathbb{P}(X=2)=3/8; \quad \mathbb{P}(X=3)=1/8.$

Diszkrét esetben így számolhatunk:

$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{k=0}^{3} k^2\mathbb{P}(X=k)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+9\cdot\frac{1}{8}=\frac{24}{8}=3.$$

Ebből és a korábbi számolásból

$$D^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-\left[\mathbb{E}(X)\right]^2=3-1,5^2=3-2,25=0,75=\frac{3}{4}.$$

Végül pedig a fiúk számának szórása:

$$D(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=0,866.$$

A kockadobás szórása

Legyen X egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}\cdot 1^2 + \frac{1}{6}\cdot 2^2 + \frac{1}{6}\cdot 3^2 + \frac{1}{6}\cdot 4^2 + \frac{1}{6}\cdot 5^2 + \frac{1}{6}\cdot 6^2 = \frac{91}{6}.$$

Másrészt

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{7}{2}.$$

Ebből

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 2,92.$$

A kockadobás szórása: $D(X) = \sqrt{2,92} = 1,71.$

Általában n oldalú dobókocka esetén: $D(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$

A szórás tulajdonságai

- (nemnegativitás) $D^2(X) \geq 0$ és $D(X) \geq 0$ mindig teljesül
- (szorzás és eltolás) ha a, b valós számok, X véges szórású valószínűségi változó, akkor

$$D^2(aX+b) = a^2 D^2(X) \quad \Rightarrow \quad D(aX+b) = |a| D(X).$$

A szórás tulajdonságai

- (nemnegativitás) $D^2(X) \geq 0$ és $D(X) \geq 0$ mindig teljesül
- (szorzás és eltolás) ha a, b valós számok, X véges szórású valószínűségi változó, akkor

$$D^2(aX+b) = a^2 D^2(X) \quad \Rightarrow \quad D(aX+b) = |a| D(X).$$

- van olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke véges, de a szórása nem létezik (például: $\mathbb{P}(X = k) = c/k^3$ megfelelő c-vel)

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$: mindkét dobás hatos

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; **A ∩ B**: mindkét dobás hatos

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és B események **függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$: az első dobás hatos, a második négyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; **A ∩ C**: az első dobás hatos, a második négyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}.$$

Az A és C események **nem függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; $\mathbf{A} \cap \mathbf{D}$: az első dobás hatos, a második egyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

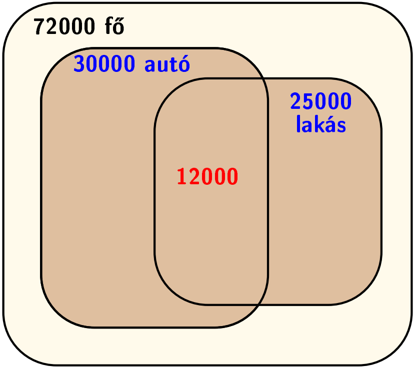
A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; **A ∩ D**: az első dobás hatos, a második egyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és D események **függetlenek**.

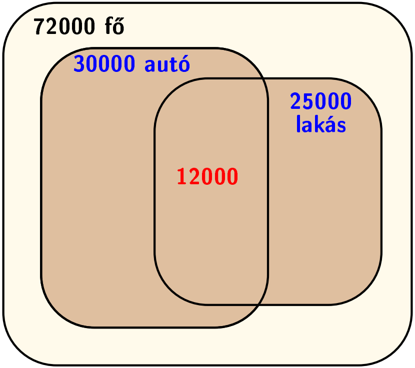
Függetlenség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkétezernek mindkettő. Igaz-e, hogy az, hogy egy véletlenszerűen választott lakos rendelkezik autóval, illetve lakással, független egymástól?



Függetlenség: példa

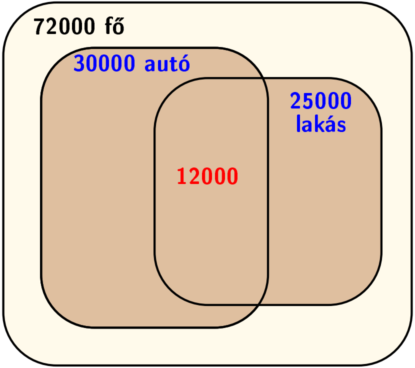
Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkétezernek mindkettő. Igaz-e, hogy az, hogy egy véletlenszerűen választott lakos rendelkezik autóval, illetve lakással, független egymástól?



$$16,7\% = \frac{12000}{72000} = \mathbb{P}(A \cap L) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(L) = \frac{30000}{72000} \cdot \frac{25000}{72000} = 14,5\%.$$

Függetlenség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkétezernek mindkettő. Igaz-e, hogy az, hogy egy véletlenszerűen választott lakos rendelkezik autóval, illetve lakással, független egymástól?



$16,7\% = \mathbb{P}(A \cap L) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(L) = 14,5\% \Rightarrow$ nem független a két esemény.

Események függetlensége

Definíció

Az $A, B \in \mathcal{A}$ *események* **függetlenek**, *ha*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Események függetlensége

Definíció

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, *ha*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Példa. Húzunk egy lapot egy magyarkártya-csomagból , mindet azonos valószínűséggel (32 lap, 8 piros, 4 ász). A: piros, B: ász.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}; \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{8}; \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{32}.$$

Tehát A és B függetlenek.

Függetlenség

Definíció (Függetlenség)

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *véges sok esemény* **független**, *ha minden* $1 \leq k \leq n$*-re és* $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ *indexsorozatra*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *végtelen sok esemény független, ha tetszőlegesen kiválasztva véges sokat közülük független eseményeket kapunk.*

Függetlenség

Definíció (Függetlenség)

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *véges sok esemény* **független**, *ha minden* $1 \leq k \leq n$*-re és* $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ *indexsorozatra*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *végtelen sok esemény független, ha tetszőlegesen kiválasztva véges sokat közülük független eseményeket kapunk.*

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *események* **páronként függetlenek**, *ha minden* $1 \leq i < j$ *esetén* A_i *és* A_j *függetlenek, azaz*

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ események függetlenek, akkor páronként is függetlenek, de fordítva nem lehet következtetni.

Függetlenség

Független események:

- egymás utáni kockadobások;
- holnap New Yorkban, illetve Budapesten esik az eső;
- egy szerver válaszideje két véletlenül választott időpontban legfeljebb 10 ms

Nem független események:

- két kockadobás összege, illetve szorzata;
- holnap Budaörsön, illetve Budapesten esik az eső;
- egy szerverre közvetlenül egymás után küldött emailek megérkeznek-e

Binomiális eloszlás

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Binomiális eloszlás

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Definíció

Az X valószínűségi változó **binomiális eloszlású** *n renddel és p paraméterrel, ha lehetséges értékei:*

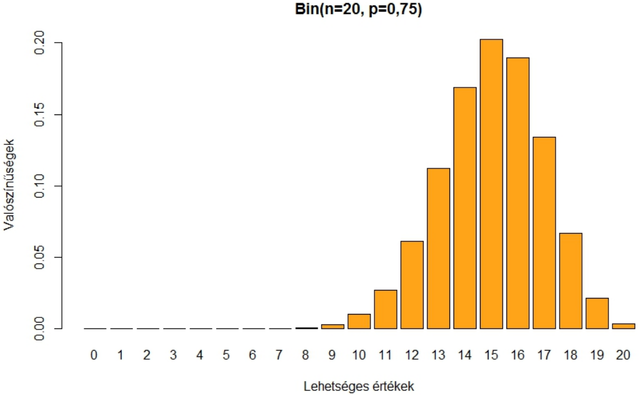
$$0, 1, 2, \ldots, n,$$

és minden $0 \le k \le n$ egészre

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

($n \ge 1$ egész, $0 < p < 1$.) Jelölés: $\mathrm{Bin}(n, p)$.

Példa: binomiális eloszlás



Binomiális eloszlás, $n = 20$, $p = 0,75$: húsz független kísérlet, mindegyik 75% valószínűséggel sikerül, a sikeresek számának eloszlása.

Példa: binomiális eloszlás

- Egy 8 hosszú véletlen bitsorozatban az egyesek száma binomiális eloszlású $n = 8$ renddel és $p = 1/2$ paraméterrel (függetlenséget feltételezve).

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ egyes van}) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{8}{k} 0,5^k 0,5^{8-k} = \binom{8}{k} \frac{1}{2^8}.$$

  Például

$$\mathbb{P}(\text{pontosan 3 egyes van}) = \mathbb{P}(X = 3) = \binom{8}{3} 0,5^3 0,5^5 = \frac{56}{256} = 0,219.$$

- Visszatevéses mintavételnél a húzott fekete golyók száma (N golyó, ebből M fekete, n-szer húzunk visszatevéssel) binomiális eloszlású n renddel és $p = M/N$ paraméterrel:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k (N-M)^{n-k}}{N^n}.$$

A binomiális eloszlás tulajdonságai

Állítás

Legyen X binomiális eloszlású valószínűségi változó n renddel és p paraméterrel.

(a) *Az $X \sim Bin(n, p)$ binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke:*

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

(b) *Az $X \sim Bin(n, p)$ binomiális eloszlású valószínűségi változó szórása:*

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Példa: $X \sim \mathrm{Bin}(8, 1/2)$ az egyesek száma. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = 8 \cdot 1/2 = 4; \qquad D(X) = \sqrt{8 \cdot 1/2 \cdot 1/2} = \sqrt{2} = 1,414.$$

Binomiális eloszlás

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Binomiális eloszlás

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Például:

- Visszatevéses mintavétel
- Egy felmérésben $n = 1500$ embert kérdezünk meg, egy adott kérdésre mindenki a többiektől függetlenül $p = 0,8$ valószínűséggel válaszol. A válaszok száma binomiális eloszlású, várható értéke $np = 1200$, szórása $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1500 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 15,49$.
- Egy szerverre egy hónap alatt $n = 60000$ emailt küldenek, mindegyik a többitől függetlenül $p = 0,0001$ veszik el. Az elveszett emailek száma binomiális eloszlású, várható értéke $np = 6$, szórása $0,77$.
- Tegyük fel, hogy a nyár $n = 92$ napjának mindegyikén a többitől függetlenül $p = 0,02$ valószínűséggel lesz jégeső egy adott helyen. A nyári jégesők száma binomiális eloszlású.

Poisson-eloszlás

Definíció

Legyen $\lambda > 0$. *Azt mondjuk, hogy az* X *valószínűségi változó* λ *paraméterű Poisson-eloszlású, ha lehetséges értékei* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *a hozzájuk tartozó valószínűségek pedig:*

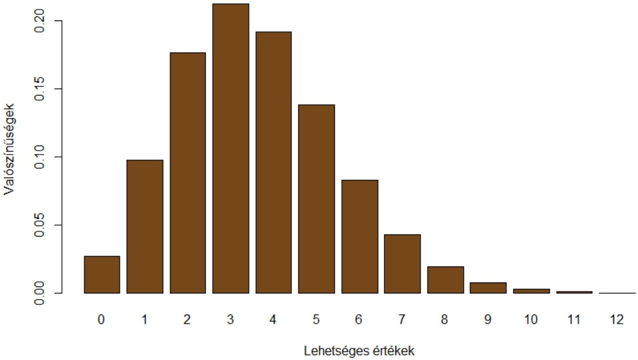
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Állítás (A Poisson-eloszlás tulajdonságai)

Legyen X *Poisson-eloszlású valószínűségi változó* λ *paraméterrel. Ekkor* X *várható értéke, szórása és szórásnégyzete:*

$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \qquad D(X) = \sqrt{\lambda}; \qquad D^2(X) = \lambda.$$

Példa: Poisson-eloszlás



ábra: Poisson-eloszlás, $\lambda = 3,61$, $k = 12$-ig.

A Poisson-eloszlás és a binomiális eloszlás kapcsolata

A Poisson-eloszlást általában akkor használják, ha sok független, kis valószínűséggel bekövetkező eseménynél a bekövetkező események számát kell tekinteni. Például:

- a sajtóhibák száma egy könyvben;
- egy biztosító 15000 ügyfele által összesen okozott balesetek száma;
- nagyobb tűzesetek száma egy adott időszakban.

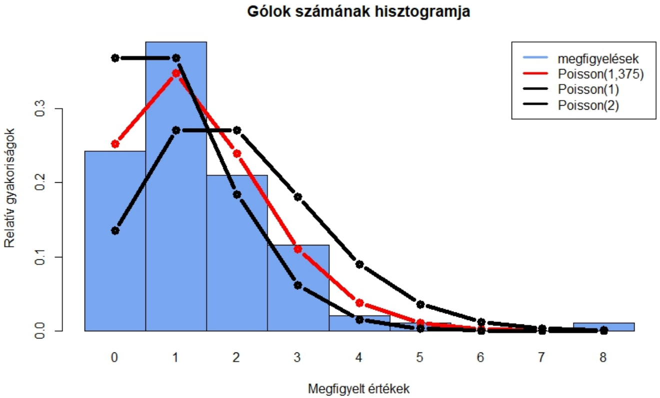
Legyen $\lambda > 0$ pozitív szám, és $p_n = \lambda/n$ minden $n = 1, 2, \ldots$ egészre. Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, Y_n eloszlása pedig $\mathrm{Bin}(n, p_n)$. Ekkor tetszőleges $k = 0, 1, 2, \ldots$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(X = k),$$

azaz

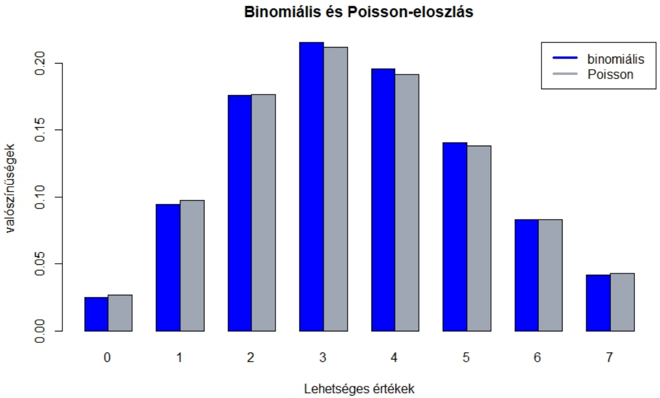
$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Poisson-eloszlás



A gólok számának hisztogramja $n = 95$ mérkőzésen, és különböző paraméterű Poisson-eloszlások

A Poisson-eloszlás és binomiális eloszlás kapcsolata



A binomiális eloszlás $n = 92$ renddel és $p = 0,0392$ paraméterrel, illetve a Poisson-eloszlás $\lambda = np = 3,61$ paraméterrel

Geometriai eloszlás

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Y: hányadik kísérlet az első sikeres.

Geometriai eloszlás

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Y: hányadik kísérlet az első sikeres.

Definíció

Az Y valószínűségi változó **geometriai eloszlású** *p paraméterrel, ha lehetséges értékei:*

$$1, 2, 3\ldots$$

és minden $1 \leq k$ egészre

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

$(0 < p < 1.)$ Jelölés: $\mathrm{Geo}(p)$. Másik elnevezés: Pascal-eloszlás.

A geometriai eloszlás tulajdonságai

Példa: egy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után. Jelölje Y, hogy hányadik dobásnál kapjuk az első hatost. Ekkor Y geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel. Y lehetséges értékei $k = 1, 2, \ldots$, és

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

A geometriai eloszlás tulajdonságai

Példa: egy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után. Jelölje Y, hogy hányadik dobásnál kapjuk az első hatost. Ekkor Y geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel. Y lehetséges értékei $k = 1, 2, \ldots$, és

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Állítás

Legyen Y geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel. Ekkor

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}; \qquad D(Y) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

A geometriai eloszlás tulajdonságai

Példa: egy szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után. Jelölje Y, hogy hányadik dobásnál kapjuk az első hatost. Ekkor Y geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel. Y lehetséges értékei $k = 1, 2, \ldots$, és

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Állítás

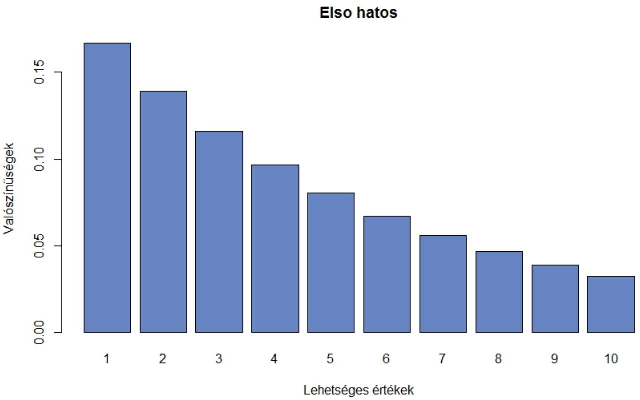
Legyen Y geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel. Ekkor

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}; \qquad D(Y) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

A példában szereplő Y várható értéke és szórása:

$$\mathbb{E}(Y) = 6; \qquad D(Y) = \sqrt{\frac{5/6}{1/36}} = \sqrt{30} = 5,477.$$

Példa: geometriai eloszlás



Az első hatos eloszlása: geometriai eloszlás, $p = 1/6$, $k = 10$-ig.

Hipergeometrikus eloszlás

Definíció

Legyenek N, M, n *pozitív egészek úgy, hogy* $1 \leq n \leq M \leq N$. *Az* X *valószínűségi változó* **hipergeometrikus eloszlású**, *ha*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Hipergeometrikus eloszlás

Definíció

Legyenek N, M, n *pozitív egészek úgy, hogy* $1 \leq n \leq M \leq N$*. Az* X *valószínűségi változó* **hipergeometrikus eloszlású***, ha*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Példa: visszatevés nélküli mintavételnél a húzott fekete golyók száma.

Lottósorsolásnál a találatok száma (X) hipergeometrikus eloszlású $N = 90$, $M = 5$, $n = 5$ paraméterekkel:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

A hipergeometrikus eloszlás tulajdonságai

Állítás

Legyen az X valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású N, M és n paraméterekkel.

(a) *Az X valószínűségi változó várható értéke:*

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{M}{N}.$$

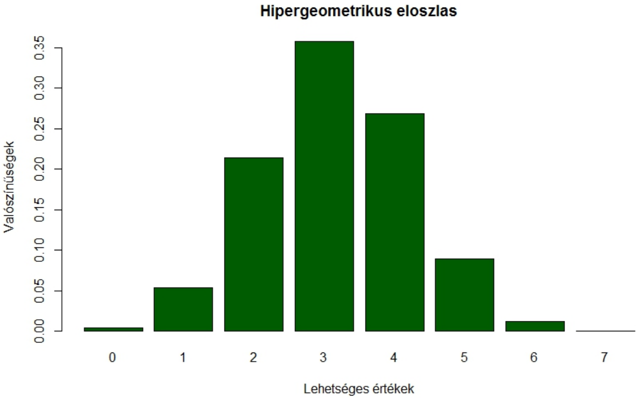
(b) *Az X valószínűségi változó szórása:*

$$D(X) = \sqrt{n \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}.$$

Példa. Az ötöslottón a találatok számának várható értéke és szórása:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{25}{90} = 0,2778; \qquad D(X) = 0,5006.$$

Példa: a hipergeometrikus eloszlás



Hipergeometrikus eloszlás, $N = 20$, $M = 9, n = 7$.