Valószínűségszámítás és statisztika

Informatika BSc, esti tagozat
Backhausz Ágnes
agnes@math.elte.hu
fogadóóra: szerda 10-11 és 13-14, D 3-415

2018/2019. tavaszi félév

Bevezetés

A valószínűségszámítás és statisztika céljai:

- véletlen folyamatok modellezése;
- kísérletekből, felmérésekből származó adatok elemzése;
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján;
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata;
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése.

Bevezetés

A valószínűségszámítás és statisztika céljai:

- véletlen folyamatok modellezése;
- kísérletekből, felmérésekből származó adatok elemzése;
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján;
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata;
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése.

Alkalmazási területek:

- informatika: adatok feldolgozása, előrejelzés, sorbanállás elmélete
- élő és élettelen természettudományok, társadalomtudományok: kísérleti eredmények értelmezése;
- gazdasági folyamatok elemzése, biztosítás– és pénzügyi matematika.

Ajánlott irodalom

- összefoglaló, diasorok, tematika: **moodle.elte.hu**
- Csiszár Villő: Valószínűségszámítás, jegyzet.
  `http://csvillo.web.elte.hu/esti/valszam.pdf`
- Csiszár Villő: Statisztika, jegyzet.
  `http://csvillo.web.elte.hu/esti/stat.pdf`
- Fazekas István: Valószínűségszámítás és statisztika.
- Arató Miklós, Prokaj Vilmos és Zempléni András: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba: példákkal, szimulációkkal
- Ross: A first course in probability
- Michael Baron: Probability and statistics for computer scientists, CRC Press, 2014.

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

- Mindkét dobás hatféle lehet: $6 \cdot 6 = 36$, vagyis 36 darab dobássorozat van.
- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek $1/36$ a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma: 6.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Tehát $\mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$.

Példa: két hatos

Négy szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két hatos lesz?

Példa: két hatos

Négy szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két hatos lesz?

- Mind a négy dobás hatféle lehet: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ dobássorozat van.
- A dobássorozatok egyformán valószínűek.
- A kedvező dobássorozatok száma: $\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

$$
\begin{array}{cccc}
6611 & 6161 & \dots & 1166 \\
6612 & 6162 & \dots & 1266 \\
6621 & 6261 & \dots & 2166 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
6655 & 6565 & \dots & 5566 \\
\hline
25 & 25 & \dots & 25
\end{array}
$$

Példa: két hatos

Négy szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két hatos lesz?

- Mind a négy dobás hatféle lehet: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ dobássorozat van.
- A dobássorozatok egyformán valószínűek.
- A kedvező dobássorozatok száma: $\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

$$
\begin{array}{cccc}
6611 & 6161 & \ldots & 1166 \\
6612 & 6162 & \ldots & 1266 \\
6621 & 6261 & \ldots & 2166 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
6655 & 6565 & \ldots & 5566 \\
\hline
25 & 25 & \ldots & 25
\end{array}
$$

A hatosokat $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen helyezhetjük el, a maradék két dobás pedig $5 \cdot 5 = 25$-féle lehet. A válasz $150/1296 = 0,116$.

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy 8 bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes $0-1$ sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 darab 1-es lesz benne?

$$11100000, 11010000, 11001000, \ldots, 10100100, 10100010, \ldots, 00000111$$

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy 8 bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes $0-1$ sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 darab 1-es lesz benne?

$$11100000, 11010000, 11001000, \dots, 10100100, 10100010, \dots, 00000111$$

- Mind a 8 bit kétféle lehet: $2^8 = 256$ lehetséges bitsorozat van.
- A sorozatok egyformán valószínűek.

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy 8 bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes $0-1$ sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 darab 1-es lesz benne?

$$11100000, 11010000, 11001000, \ldots, 10100100, 10100010, \ldots, 00000111$$

- Mind a 8 bit kétféle lehet: $2^8 = 256$ lehetséges bitsorozat van.
- A sorozatok egyformán valószínűek.
- A kedvező bitsorozatok száma: $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$, hiszen ennyiféleképpen választhatjuk ki a három darab egyes helyét a 8 lehetőségből.
- Tehát:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan 3 darab egyes lesz benne}) = \binom{8}{3}\frac{1}{2^8} = \frac{56}{256} = 0,219.$$

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy n bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes $0-1$ sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab 1-es lesz benne?

$$11100000, 11010000, 11001000, \ldots, 10100100, 10100010, \ldots, 00000111$$

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy n bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes $0-1$ sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab 1-es lesz benne?

$$11100000, 11010000, 11001000, \ldots, 10100100, 10100010, \ldots, 00000111$$

- Mind az n bit kétféle lehet: 2^n lehetséges bitsorozat van.
- A sorozatok egyformán valószínűek.

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy n bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes $0-1$ sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab 1-es lesz benne?

$$11100000, 11010000, 11001000, \ldots, 10100100, 10100010, \ldots, 00000111$$

- Mind az n bit kétféle lehet: 2^n lehetséges bitsorozat van.
- A sorozatok egyformán valószínűek.
- A kedvező bitsorozatok száma: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, hiszen ennyiféleképpen választhatjuk ki a k darab egyes helyét az n lehetőségből.
- Tehát:
$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ darab egyes lesz benne}) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$

Példa: véletlen bitsorozat

Tekintsünk egy n bit hosszú véletlen bitsorozatot (feltételezve, hogy az összes $0-1$ sorozat egyformán valószínű). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab 1-es lesz benne?

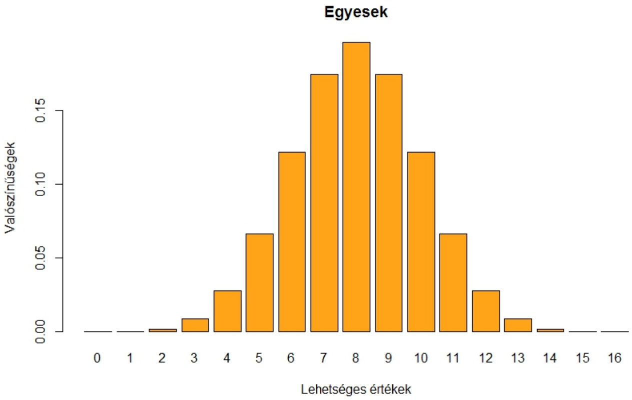
$$11100000, 11010000, 11001000, \dots, 10100100, 10100010, \dots, 00000111$$

- Mind az n bit kétféle lehet: 2^n lehetséges bitsorozat van.
- A sorozatok egyformán valószínűek.
- A kedvező bitsorozatok száma: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, hiszen ennyiféleképpen választhatjuk ki a k darab egyes helyét az n lehetőségből.
- Tehát:
$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ darab egyes lesz benne}) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$

Binomiális eloszlás: $k = 0, 1, \dots, n$, $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Példa: 16 hosszú véletlen bitsorozat

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ darab egyes lesz benne}) = \binom{16}{k}\frac{1}{2^{16}}.$$



ábra: Az egyesek számának eloszlása

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 balkezes és 25 jobbkezes gyerek van. Tornaórán véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két balkezes gyerek van?

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 balkezes és 25 jobbkezes gyerek van. Tornaórán véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két balkezes gyerek van?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két balkezes}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 0,319.$$

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 balkezes és 25 jobbkezes gyerek van. Tornaórán véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két balkezes gyerek van?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két balkezes}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 0,319.$$

Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér. **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva). Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

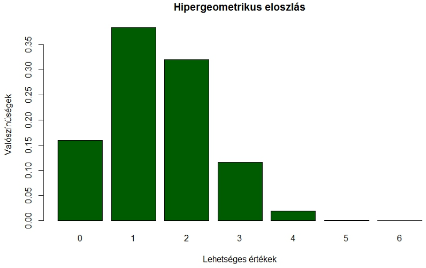
$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

A kihúzott fekete golyók száma **hipergeometrikus eloszlású.**

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

8 balkezes, 25 jobbkezes, hatfős csapatot választanak.

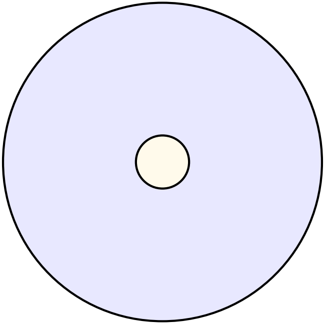
$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ balkezes}) = \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{25}{6-k}}{\binom{33}{6}}.$$



ábra: A balkezes csapattagok számának eloszlása

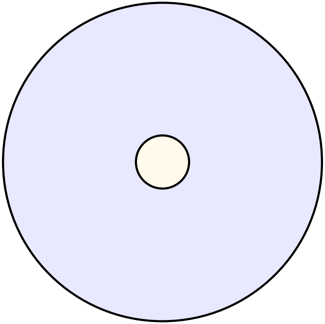
Példa: geometriai valószínűség

Egy $R = 30$ cm sugarú céltáblára lövünk. Feltételezzük, hogy a lövedék biztosan eltalálja a céltáblát, és a lövés helye véletlenszerűen, egyenletesen helyezkedik el. A céltábla középső $r = 5$ cm sugarú körlemeze 10 pontot ér. Mennyi a valószínűsége, hogy sikerül 10 pontot elérni?



Példa: geometriai valószínűség

Egy $R = 30$ cm sugarú céltáblára lövünk. Feltételezzük, hogy a lövedék biztosan eltalálja a céltáblát, és a lövés helye véletlenszerűen, egyenletesen helyezkedik el. A céltábla középső $r = 5$ cm sugarú körlemeze 10 pontot ér. Mennyi a valószínűsége, hogy sikerül 10 pontot elérni?



$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{középső rész területe}}{\text{céltábla területe}} = \frac{5^2 \cdot \pi}{30^2 \cdot \pi} = \frac{1}{36} = 2,8\%.$$

A valószínűség elemi tulajdonságai

- valószínűsége eseményeknek van
- a valószínűség értéke legalább 0, legfeljebb 1
- ha az A és B események kizáróak (vagyis $A \cap B = \emptyset$, egyszerre nem következhetnek be), akkor uniójuk valószínűsége (legalább az egyik bekövetkezik):

A valószínűség elemi tulajdonságai

- valószínűsége eseményeknek van
- a valószínűség értéke legalább 0, legfeljebb 1
- ha az A és B események kizáróak (vagyis $A \cap B = \emptyset$, egyszerre nem következhetnek be), akkor uniójuk valószínűsége (legalább az egyik bekövetkezik):

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Példa. Egy álláspályázatra egy jelentkezőt vesznek fel. Tegyük fel, hogy annak valószínűsége, hogy barna szemű embert vesznek fel, $0,3$, míg annak valószínűsége, hogy kékszeműt, $0,1$. Ekkor annak valószínűsége, hogy barna vagy kék szemű embert vesznek fel: $0,4$.

A valószínűség elemi tulajdonságai

- valószínűsége eseményeknek van
- a valószínűség értéke legalább 0, legfeljebb 1
- ha az A és B események kizáróak (vagyis $A \cap B = \emptyset$, egyszerre nem következhetnek be), akkor uniójuk valószínűsége (legalább az egyik bekövetkezik):

  $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

  Példa. Egy álláspályázatra egy jelentkezőt vesznek fel. Tegyük fel, hogy annak valószínűsége, hogy barna szemű embert vesznek fel, $0,3$, míg annak valószínűsége, hogy kékszeműt, $0,1$. Ekkor annak valószínűsége, hogy barna vagy kék szemű embert vesznek fel: $0,4$.

  A barna szem és kék szem **kizáró események** (egyszerre nem következhetnek be), de **nem függetlenek**.
- Tegyük fel, hogy $A \subseteq B$, azaz ha A bekövetkezik, akkor B is mindenképpen bekövetkezik. Ekkor

  $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \setminus B).$$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Definíció

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *hármas* **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, *ha*

- Ω *nem üres halmaz;*
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, *azaz minden* $A \in \mathcal{A}$*-ra* $A \subseteq \Omega$ *úgy, hogy*
  - (i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
  - (ii) *ha* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, *akkor* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *(azaz megszámlálható sok* $\mathcal{A}$*-beli elem uniója is* $\mathcal{A}$*-beli);*
  - (iii) *ha* $A \in \mathcal{A}$, *akkor* $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ *(azaz* $\mathcal{A}$*-beli halmazok komplementere is* $\mathcal{A}$*-beli.*
- $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *függvény, melyre*
  - (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
  - (ii) *ha* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *és minden* $1 \leq i < j$*-re* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *akkor*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- Ω: eseménytér vagy elemi események halmaza.
- Ω elemei ($\omega \in \Omega$): elemi események.
- $\mathcal{A}$: események halmaza (vagy események σ-algebrája).
- $\mathcal{A}$ elemei ($A \in \mathcal{A}$): események.
- $\mathbb{P}$: valószínűség (probability).
- Ω esemény neve: biztos esemény.
- $\emptyset$ (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény.
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ kizáró események, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz nincs olyan $\omega \in A$, melyre $\omega \in B$ is teljesül.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ olyan mértéktér, ahol $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ teljesül, $\mathbb{P}$ pedig egy mérték.

Példa: Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 30\}$, $\mathcal{A}$ az Ω megfelelő részhalmazai, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 5\}$, és $\mathbb{P}(A) = 1/36$.
- $\Omega = \{8 \text{ hosszú bitsorozatok}\}$, $\mathcal{A} = \Omega$ összes részhalmaza, $\mathbb{P}(\omega) = 1/256$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre/bitsorozatra.

  A esemény: pontosan 3 egyest kapunk, ekkor $\mathbb{P}(A) = 56/256 = 0,219$.
- $\Omega = \{\text{hatfős csapatok}\}$, $\mathcal{A} = \Omega$ összes részhalmaza, $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\binom{33}{6}}$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre.

  A esemény: pontosan két balkezes kerül a csapatba; $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 0,319$.

Példa: Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 30\}$, $\mathcal{A}$ az Ω megfelelő részhalmazai, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 5\}$, és $\mathbb{P}(A) = 1/36$.
- $\Omega = \{8 \text{ hosszú bitsorozatok}\}$, $\mathcal{A} = \Omega$ összes részhalmaza, $\mathbb{P}(\omega) = 1/256$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre/bitsorozatra.

  A esemény: pontosan 3 egyest kapunk, ekkor $\mathbb{P}(A) = 56/256 = 0,219$.
- $\Omega = \{\text{hatfős csapatok}\}$, $\mathcal{A} = \Omega$ összes részhalmaza, $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\binom{33}{6}}$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre.

  A esemény: pontosan két balkezes kerül a csapatba; $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 0,319$.

Az utóbbi két eset **klasszikus valószínűségi mező:** minden elemi esemény egyformán valószínű.

A valószínűségek kombinatorikai kiszámítási módja

Tegyük fel, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőre az alábbiak teljesülnek (**klasszikus valószínűségi mező**):

- Ω véges sok elemből áll: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.
- $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll.
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$ minden $\omega \in \Omega$-ra, azaz az elemi események valószínűsége egyenlő.

A valószínűségek kombinatorikai kiszámítási módja

Tegyük fel, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőre az alábbiak teljesülnek (**klasszikus valószínűségi mező**):

- Ω véges sok elemből áll: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.
- $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll.
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$ minden $\omega \in \Omega$-ra, azaz az elemi események valószínűsége egyenlő.

Ilyenkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{A \text{ elemeinek száma}}{\Omega \text{ elemeinek száma}} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Példa: két kockadobás, véletlen bitsorozat, visszatevés nélküli mintavétel.

A valószínűség elemi tulajdonságai

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

Definíció

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események.

- *Unió:* $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ vagy } \omega \in B\}$.
- *Metszet:* $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ és } \omega \in B\}$.
- *Komplementer/ellentett esemény:* $\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$.
- *Különbség:* $B \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \in B \text{ és } \omega \notin A\}$.
- *A maga után vonja B-t, ha minden $\omega \in A$-ra $\omega \in B$ is teljesül. Jelölés: $A \subseteq B$.*

A valószínűség elemi tulajdonságai

Állítás (Komplementer valószínűsége)

Ha $A \in \mathcal{A}$ *esemény, akkor* $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Állítás (Különbség valószínűsége)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ *eseményekre* $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

A valószínűség elemi tulajdonságai

Állítás (Komplementer valószínűsége)

Ha $A \in \mathcal{A}$ esemény, akkor $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Állítás (Különbség valószínűsége)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

Állítás (Tartalmazás)

Ha az $A, B \in \mathcal{A}$ eseményekre $A \subseteq B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

A valószínűség elemi tulajdonságai

Állítás (Komplementer valószínűsége)

Ha $A \in \mathcal{A}$ *esemény, akkor* $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Állítás (Különbség valószínűsége)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ *eseményekre* $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

Állítás (Tartalmazás)

Ha az $A, B \in \mathcal{A}$ *eseményekre* $A \subseteq B$, *akkor* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Állítás (Szitaformula)

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ *eseményekre teljesül, hogy*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Szitaformulák

Állítás

Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ *eseményekre teljesül, hogy*

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Szitaformulák

Állítás

Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ eseményekre teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Legyenek $A_1, \ldots, A_k$ tetszőleges események. Ekkor az események uniójának valószínűségét a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \\ - \ldots + (-1)^{k+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \\ = \sum_{t=1}^{k} (-1)^{t+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_t \le k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{ik}).$$

Valószínűségi változó

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény valószínűségi változó, ha tetszőleges* $a < b$ *valós számokra*

$$\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}.$$

Valószínűségi változó

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény valószínűségi változó, ha tetszőleges* $a < b$ *valós számokra*

$$\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}.$$

Példa. Valakinek három gyereke születik. Legyen X a fiúk száma. Ekkor

$$\Omega = \{FFF, FFL, FLF, FLL, LFF, LFL, LLF, LLL\};$$

$$X(LLL) = 0; \qquad X(LLF) = X(LFL) = X(FLL) = 1;$$

$$X(FFL) = X(FLF) = X(LFF) = 2; \qquad X(FFF) = 3.$$

Ekkor $\mathbb{P}(X = 0) = 1/8, \mathbb{P}(X = 1) = 3/8, \mathbb{P}(X = 2) = 3/8, \mathbb{P}(X = 3) = 1/8.$

Példa: a dobott számok összege

Két szabályos dobókockával dobunk. Ekkor Ω:

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Legyen $Y : \Omega \to R$ a dobott számok összege:

$$Y(11) = 2, Y(12) = Y(21) = 3, \ldots,$$

$$Y(61) = Y(52) = \ldots = Y(16) = 7, \ldots, Y(66) = 12.$$

Példa: a dobott számok összege

Két szabályos dobókockával dobunk. Ekkor Ω:

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Legyen $Y : \Omega \to R$ a dobott számok összege:

$$Y(11) = 2, Y(12) = Y(21) = 3, \dots,$$

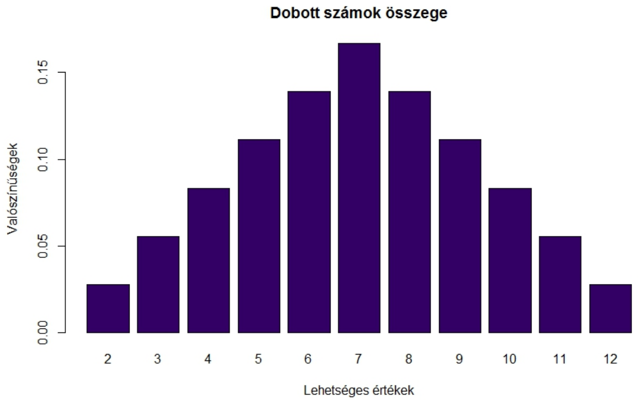
$$Y(61) = Y(52) = \dots = Y(16) = 7, \dots, Y(66) = 12.$$

Ekkor

$$\mathbb{P}(Y = 2) = 1/36, \mathbb{P}(Y = 3) = 2/36, \dots, \mathbb{P}(Y = 7) = 1/6, \dots, \mathbb{P}(Y = 12) = 1/36.$$

Példa: a dobott számok összege

Két szabályos dobókockával dobunk. A dobott számok összegének eloszlása:



Két kockadobás összegének eloszlása

Diszkrét valószínűségi változó eloszlása

Definíció (Diszkrét valószínűségi változó)

Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó diszkrét, ha véges sok vagy megszámlálható sok értéket vesz fel.*

Definíció (Eloszlás)

Legyenek az X *valószínűségi változó lehetséges értékei* $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$, *és legyen*

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor az $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots$ *sorozat az* X *valószínűségi változó eloszlása.*

Diszkrét valószínűségi változó eloszlása

Példa: három gyerek. Az előző példában: háromszor gyerek születik, X a fiúk száma, mind a $2^3 = 8$ lehetőség egyformán valószínű.

Ekkor X lehetséges értékei: $0, 1, 2, 3$.

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1/8; \quad \mathbb{P}(X = 1) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 2) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/8.$$

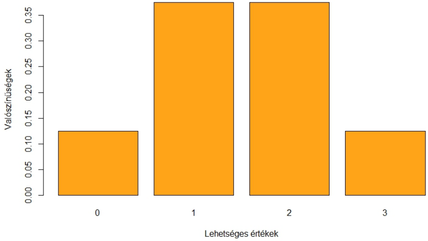
Mindezek alapján X eloszlása az alábbi sorozat:

$$(0, 1/8), \qquad (1, 3/8), \qquad (2, 3/8), \qquad (3, 1/8).$$

Példa: szabályos kockadobás. Egyszer dobunk szabályos dobókockával, jelölje Y a dobott számot. Ekkor Y eloszlása:

$$(1, 1/6), \qquad (2, 1/6), \qquad (3, 1/6), \qquad (4, 1/6), \qquad (5, 1/6), \qquad (6, 1/6).$$

Példa: a gyerekek számának eloszlása



A fiúk számának lehetséges értékei a három gyerek közül és a hozzájuk tartozó valószínűségek:

$$(0, 1/8); \qquad (1, 3/8); \qquad (2, 3/8); \qquad (3, 1/8).$$