

8. feladatsor, statisztika, 2019. november 20.

1. n elemű, ismeretlen λ paraméterű exponenciális eloszlású minta esetén adjunk torzítatlan becslést $e^{-3\lambda}$ -ra és $\frac{1}{\lambda}$ -ra. Emlékeztetőül: $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlás esetén $\mathbb{P}(X \leq t) = e^{-\lambda t}$, ha $t > 0$, továbbá $\mathbb{E}(X) = D(X) = \frac{1}{\lambda}$. Vegyük észre, hogy

$$e^{-3\lambda} = 1 - (1 - e^{-3\lambda}) = 1 - \mathbb{P}_\lambda(X \leq 3) = \mathbb{P}_\lambda(X > 3),$$

ha X eloszlása λ paraméterű exponenciális eloszlás.

Legyen $T(X_1, \dots, X_n)$ a 3-nál nagyobb mintaelemek aránya. Mivel a 3-nál nagyobb mintaelemek száma binomiális eloszlású n renddel és $p = e^{-3\lambda}$ paraméterrel, ennek várható értéke np . Ezért

$$\mathbb{E}_\lambda(T(X_1, \dots, X_n)) = \frac{np}{n} = p = e^{-3\lambda}$$

minden λ -ra, vagyis a becslés torzítatlan becslése $e^{-3\lambda}$ -nak.

Általában is a mintaátlag torzítatlan becslése az eloszlás várható értékének. Ezért \bar{X} torzítatlan becslése $1/\lambda$ -nak.

2. n elemű λ paraméterű Poisson-eloszlású minta esetén adjunk torzítatlan becslést $e^{-\lambda}$ -ra és λ^2 -re.

Emlékeztetőül: λ paraméterű Poisson-eloszlás esetén $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, továbbá $\mathbb{E}(X) = \mathbb{D}^2(X) = \lambda$.

Vegyük észre, hogy $e^{-\lambda} = \mathbb{P}_\lambda(X = 0)$, ha X eloszlása λ paraméterű Poisson-eloszlás. Az előző feladathoz hasonlóan, a 0 értékű mintaelemek aránya torzítatlan becslése $e^{-\lambda}$ -nak.

Tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}_\lambda(X) = \lambda; \quad \mathbb{E}_\lambda(X^2) = D_\lambda(X)^2 + \mathbb{E}_\lambda(X)^2 = \lambda + \lambda^2.$$

Ezért az is igaz, hogy

$$\lambda = \mathbb{E}_\lambda(X^2) - \mathbb{E}_\lambda(X)^2 = \mathbb{E}_\lambda(X^2 - X).$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j)^2 - \bar{X}^2$$

torzítatlan becslése λ^2 -nek.

3. Adjunk meg torzítatlan becslést a $[0, \theta]$ intervallumon egyenletes eloszlás ϑ paraméterére

- (a) a mintaátlag
- (b) a maximum

segítségével. Hasonlítsuk őket össze hatásosság szempontjából, azaz döntsük el, hogy melyiknek kisebb a szórása.

4. Bizonyítsuk be, hogy az átlag torzítatlan becslése a várható értéknek (ha az véges), és hogy a korrigált tapasztalati szórásnégyzet torzítatlan becslése a szórásnégyzetnek.

Korrigált tapasztalati szórásnégyzet:

$$s_n^{*2} = \frac{n}{n-1} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \right) - \bar{X}^2 \right),$$

ahol $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ a minta átlaga.

- (1) Az átlag várható értéke

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \cdot nm = m.$$

Felhasználtuk a várható érték linearitását, és hogy csak eloszlástól függ:

- $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$, ha $c \in \mathbb{R}$;
- $\mathbb{E}(Y + Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z)$;
- ha Y és Z eloszlása megegyezik, akkor $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z)$

Tehát a mintaátlag torzítatlan becslés a várható értékre.

- (2) Az átlag szórása

Legyen X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású minta, és $\mathbb{E}(X_i^4) < \infty$. Ekkor

$$D(\bar{X}) = \frac{D(X_1)}{\sqrt{n}}.$$

Bizonyítás.

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1 + \dots + X_n)}{n} = \frac{\sqrt{n\sigma^2}}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Felhasználtuk a szórás alábbi tulajdonságait:

- $D(cX) = |c|D(X)$, ha $c \in \mathbb{R}$;
- $D^2(Y + Z) = D^2(Y) + D^2(Z)$, ha Y és Z függetlenek;
- ha Y és Z eloszlása megegyezik, akkor $D(Y) = D(Z)$

(3) A korrigált tapasztalati szórásnégyzet torzítatlansága

$$s_n^{*2} = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{n}{n-1} \left[\frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n X_k^2 \right] - \bar{X}^2 \right] = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{k=1}^n X_k^2 \right] - \frac{n}{n-1} \bar{X}^2.$$

Az első tag várható értéke a szórásnégyzet definíciója alapján:

$$\mathbb{E}_\vartheta \left(\sum_{k=1}^n X_k^2 \right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_\vartheta (X_k^2) = n \cdot \mathbb{E}_\vartheta (X_1^2) = n \cdot [D_\vartheta^2(X_1) + \mathbb{E}_\vartheta (X_1)^2].$$

A második tag várható értéke az átlag szórásnégyzete alapján:

$$\mathbb{E}_\vartheta (\bar{X}^2) = D_\vartheta^2(\bar{X}^2) + \mathbb{E}_\vartheta (\bar{X})^2 = \frac{1}{n} D_\vartheta^2(X_1) + \mathbb{E}_\vartheta (X_1)^2.$$

Vagyis valóban s_n^{*2} torzítatlan becslés a szórásnégyzetre:

$$\mathbb{E}_\vartheta (s_n^{*2}) = \frac{n}{n-1} [D_\vartheta^2(X_1) + \mathbb{E}_\vartheta (X_1)^2] - \frac{n}{n-1} \left[\frac{1}{n} D_\vartheta^2(X_1) + \mathbb{E}_\vartheta (X_1)^2 \right] = D_\vartheta^2(X_1).$$

5. Adjunk torzítatlan becslést a normális eloszlás m és σ^2 paramétereire.

Mivel az eloszlás várható értéke m , és a szórása σ^2 , az előző feladat alapján \bar{X} torzítatlan becslése m -nek, és s_n^{*2} torzítatlan becslése σ^2 -nek.