5. feladatsor, valószínűségszámítás, 2019. október 25.

1. A következő vízkeménységeket mértük az A kútnál:

$$16,9 \quad 11,5 \quad 9,7 \quad 14,2 \quad 12,0 \quad 10,8 \quad 13,9 \quad 15,6$$

Tudjuk, hogy a mérések függetlenek, és normális eloszlást feltételezünk. A B kútból is kapunk néhány adatot:

$$12,0 \quad 11,9 \quad 9,6 \quad 10,6 \quad 14,5$$

Tegyük fel, hogy a vízkőkeménység megmérve normális eloszlású, és 2 a szórása.

(a) Elfogadható-e az a hipotézis 5% szignifikanciaszint (terjedelem) mellett, hogy az A kútnál a vízkőkeménység várható értéke 12?
egymintás kétoldali z-próba; $H_0 : m = 12$; $H_1 : m \neq 12$.

$$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{13,075 - 12}{2}\sqrt{8} = 1,52 \;\Rightarrow\; |z| < \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96.$$

(b) Elfogadható-e 2%-os szignifikanciaszint mellett ugyanez a hipotézis?

$$|z| < \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0,99) = 2,33.$$

Így is elfogadható a nullhipozézis.

(c) Elfogadható-e 5%-os szignifikanciaszint az a hipotézis, hogy a vízkőkeménység a B kútnál nem több 13-nál?
egymintás egyoldai z-próba: $H_0 : m \leq 13$; $H_1 : m > 13$

$$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{13,075 - 13}{2}\sqrt{8} = 0,11 \;\Rightarrow\; u < \Phi^{-1}(1-\alpha) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,65.$$

2. Egy napon tíz budapesti helyszínen megmérték a NO_2-koncentrációt. Az átlag $352\,\mu g/m^3$, a korrigált tapasztalati szórás 8 lett.

(a) 5%-os szignifikanciaszint mellett elfogadható-e az a hipotézis, hogy a koncentráció a $350\,\mu g/m^3$ tájékoztatási küszöbérték alatt van? egymintás egyoldali t-próba, $n = 10$, $f = n - 1 = 9$, $\alpha = 0,05$

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{352 - 350}{8}\sqrt{10} = 0,79 < t_{\text{krit}} = 1,83.$$

elfogatható a nullhipotézis

(b) Elfogadható-e ugyanez a hipotézis 1%-os szignifikanciaszint mellett?
$t_{\text{krit}} = 2,81 > 0,79$, elfogadható a hipotézis.

(c) Londonban 20 mérésből az átlagos koncentráció 376, a korrigált tapasztalati szórás 16 lett. $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett állíthatjuk-e, hogy Londonban szignifikánsan nagyobb a NO_2 koncentrációja?
kétmintás egyoldali t-próba, $f = 28$, $\alpha = 0,05$, $t_{\text{krit}} = 1,701$.

$$t = \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{(n_1-1){s_{n_1}^*}^2(X) + (n_2-2){s_{n_2}^*}^2(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = \frac{376 - 352}{\sqrt{9 \cdot 8^2 + 19 \cdot 16^2}} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 20 \cdot 28}{30}} = 4,44.$$

Londonban szignifikánsan nagyobb a NO_2 koncentrációja.

3. Két tárgy tömegét mérték meg ugyanazon a mérlegen (kilogrammban). Az A tárgynál $n_1 = 15$ mérésből számolva a mérések átlaga $\overline{X}_1 = 0,32$ lett, a korrigált tapasztalati szórás pedig $s_{n,1}^* = 0,0016$. A B tárgynál $n_2 = 30$ mérésből számolva az átlag $\overline{X}_2 = 0,46$, a korrigált tapasztalati szórásnégyzet pedig $s_{n,2}^* = 0,0009$. A mérések eredményét normális eloszlásnak feltételezzük, és azt is feltesszük, hogy a két mérésnél az eloszlások szórása megegyezik.

(a) Elfogadható-e 5%-os szignifikanciaszint mellett, hogy az A tárgy tömege $0,3$ kg?
(b) Elfogadható-e 1%-os szignifikanciaszint mellett, hogy a B tárgy tömege legfeljebb $0,3$?
(c) $0,05$ szignifikanciaszint mellett igaz-e, hogy a két tárgy tömege szignifikánsan eltérő?

(a) Egymintás kétoldali t-próba, $f = 14$, $\alpha = 0,05$.

$$t = \frac{\overline{X}_1 - m_0}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{0,32 - 0,3}{0,04}\sqrt{15} = 1,94 < 2,145.$$

Elfogadható a $H_0 : m = 0,3$ nullhipotézis, az A tárgy tömege nem tér el szignifikánsan $0,3$-tól.

(b) Egymintás egyoldali t-próba, $f = 29$, $\alpha = 0,01$.

$$t = \frac{\overline{X}_2 - m_0}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{0,46 - 0,3}{0,03}\sqrt{30} = 29,2 > 2,46.$$

Elutasítjuk a $H_0 : m \leq 0,3$ nullhipotézist, B tárgy tömege szignifikánsan több $0,3$-nál.

(c) kétmintás kétoldali t-próba, $\alpha = 0,05$, $f = 43$

$$t = \frac{0,32 - 0,46}{\sqrt{14 \cdot 0,04^2 + 29 \cdot 0,03^2}} \cdot \sqrt{\frac{15 \cdot 30 \cdot 43}{45}} = -13,18.$$

Mivel $|t| > t_{\text{krit}} = 2,021$, elutasítjuk a $H_0 : m_1 = m_2$ nullhipotézist, szignifikánsan különböző a két tárgy tömege.

4. Megmértük 90 férfi és 90 nő testmagasságát. A férfiak esetében az átlag 181,67 cm lett, a **korrigált tapasztalati szórás** 8,75, a nők esetében az átlag 168,9, a korrigált tapasztalati szórás 9,55. Állíthatjuk-e 5%-os terjedelem (szignifikanciaszint) mellett, hogy a férfiak testmagasságának várható értéke szignifikánsan több a nőkénél?

   kétmintás egyoldali t-próba (a két adatsor független), $f = n_1 + n_2 - 2 = 178$, $\alpha = 0,05$, $t_{\text{krit}} = 1,65$.

   $H_0 : m_1 \leq m_2$, $H_1 : m_1 > m_2$, ahol m_1 a férfiak, m_2 a nők testmagasságának várható értéke

$$t = \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{(n_1 - 1){s^*_{n_1}}^2(X) + (n_2 - 2){s^*_{n_2}}^2(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = \frac{181,7 - 168,9}{\sqrt{89 \cdot 8,8^2 + 89 \cdot 9,6^2}} \cdot \sqrt{\frac{90 \cdot 90 \cdot 178}{180}} = 9,32.$$

   Mivel $9,32 = t > t_{\text{krit}} = 1,65$, elutasítjuk a nullhipotézist. A férfiak testmagassága szignifikánsan több a nőkénél.

5. Egy élelmiszergyártó cég két helyszínen is készít gyümölcsjoghurtokat. Valaki azt állítja, hogy a két helyszínen szignifikánsan eltérő a joghurtok átlagos cukortartalma. Ennek ellenőrzésére az A üzemben 30, a B üzemben 25 pohár joghurtot vizsgáltak meg. Az átlag az A helyszínen 17,2 gramm, a B helyszínen 19,8 gramm lett, a korrigált tapasztalati szórás az A helyszínen 2,1, a B-n 1,5. A szignifikanciaszintet 5%-nak választva állíthatjuk-e, hogy szignifikánsan eltérő a cukortartalom várható értéke?

   A kétmintás kétoldali t-próba használható, mert a két adatsor független, és feltételezzük, hogy a szórások megegyeznek. A szabadsági fok $f = n_1 + n_2 - 2 = 53$, $\alpha = 0,05$, $t_{\text{krit}} = 2,009$.

   $H_0 : m_1 = m_2$, $H_1 : m_1 \neq m_2$, ahol m_1 az A, m_2 a B helyszínen készített joghurtok cukortartalmának várható értéke

$$t = \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{(n_1 - 1){s^*_{n_1}}^2(X) + (n_2 - 2){s^*_{n_2}}^2(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = \frac{17,2 - 19,8}{\sqrt{29 \cdot 2,1^2 + 24 \cdot 1,5^2}} \cdot \sqrt{\frac{30 \cdot 25 \cdot 53}{55}} = -5,18.$$

   Mivel $5,18 = |t| > t_{\text{krit}} = 2,009$, elutasítjuk a nullhipotézist. A cukortartalom szignifikánsan eltérő.