

5. feladatsor, valószínűségszámítás, 2019. október 9.

- (1) Csomagot várunk. A futár azt ígéri, hogy 8 és 12 óra között érkezik, érkezésének időpontja egyenletes eloszlású ezen az intervallumon. A korábbi tapasztalatok alapján ígéretét 90% valószínűséggel megtartja, 10% valószínűséggel viszont nem jön aznap. Feltéve, hogy 10 óráig nem érkezett meg, mennyi a valószínűsége, hogy aznap már nem jön? Feltéve, hogy t -ig nem érkezett meg, mennyi a valószínűsége, hogy aznap már nem jön? Itt $8 \leq t \leq 12$ adott szám.

A esemény: t -ig nem érkezik meg; B_1 : jön aznap; B_2 : nem jön aznap. Itt B_1, B_2 teljes eseményrendszer, hiszen közülük pontosan az egyik következik be, és pozitív a valószínűsége mind a kettőnek. A Bayes-tétel alkalmazható:

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2)} = \frac{1 \cdot 0,1}{\frac{12-t}{4} \cdot 0,9 + 1 \cdot 0,1} = \frac{0,4}{11,2 - 0,9t}.$$

Ez $t = 10$ -re $\frac{0,4}{2,2} = 19,2\%$.

- (2) Tegyük fel, hogy az, hogy mostantól mennyi idő múlva lesz legközelebb 3-asnál erősebb földrengés egy adott városban, exponenciális eloszlású $0,04$ paraméterrel (években számolva). Mennyi a valószínűsége, hogy egy éven belül lesz 3-asnál erősebb földrengés? Feltéve, hogy mostantól 4 évig nincs ilyen erős földrengés, mennyi a valószínűsége, hogy mostantól számítva az ötödik évben viszont már lesz?

X : mostantól mikor lesz földrengés. $\mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - \exp(-0,04) = 0,0392$.

Az örökifjú tulajdonság alapján szintén $0,0392$. Pontosabban:

$$\mathbb{P}(X \leq 5 | X \geq 4) = \frac{\mathbb{P}(4 \leq X \leq 5)}{\mathbb{P}(X \geq 4)} = \frac{e^{-0,04 \cdot 4} - e^{-0,04 \cdot 5}}{e^{-0,04}} = 1 - \exp(-0,04) = 0,0392.$$

- (3) Egy cukrászdában kis és nagy adagban árulnak fagyit. A kis adag ára 200 , a nagy adag ára 300 forint. Jelölje X az egy nap alatt eladott kis adag, Y az eladott nagy adag fagyik számát. Feltételezzük, hogy X és Y egymástól független, Poisson-eloszlású, 80 paraméterrel. Számítsuk ki az egy nap alatt fagyilaltot vásárlók számának és a napi, fagyilalt eladásából származó bevételnek a korrelációs együtthatóját.

$$\begin{aligned} R(X + Y, 200X + 300Y) &= \frac{\text{cov}(X + Y, 200X + 300Y)}{D(X + Y)D(200X + 300Y)} = \frac{200D^2(X) + 300D^2(Y)}{\sqrt{2}D(X) \cdot \sqrt{200^2 + 300^2}D(X)} \\ &= \frac{500}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{130000}} = 0,9806. \end{aligned}$$

- (4) Egy osztályba 15 fiú és 18 lány jár. Tegyük fel, hogy a tanulók minden nap egymástól függetlenül $1/10$ valószínűséggel hiányoznak az iskolából. Számítsuk ki a jövő pénteken hiányzó lányok és a jövő pénteki összes hiányzó számának kovarianciáját és korrelációs együtthatóját.

X : hiányzó lányok; Y : hiányzó fiúk.

$\text{cov}(X, X + Y) = D^2(X) = 18 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 1,62$.

$$R(X, X + Y) = \frac{\text{cov}(X, X + Y)}{D(X)D(X + Y)} = \frac{D^2(X)}{D(X)D(X + Y)} = \frac{\sqrt{18 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}{\sqrt{33 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{33}} = -0,7385.$$

- (5) Egy helyen megmértük a hőmérsékletet két különböző műszerrel. Tegyük fel, hogy a mérési eredmények egymástól független, normális eloszlású valószínűségi változók 6 várható értékkel és 2 szórással. Legyen X az első mérés eredménye, Y a második mérés eredménye. Számítsuk ki a következő mennyiségeket: $\text{cov}(X, X + Y)$, $\text{cov}(X, \frac{X+Y}{2})$, $\text{cov}(X - Y, X + Y)$, $R(X, \frac{X+Y}{2})$.

$\text{cov}(X, X + Y) = D^2(X) + 0 = 4$.

$\text{cov}(X, \frac{X+Y}{2}) = \frac{1}{2}(D^2(X) + 0) = 2$.

$\text{cov}(X - Y, X + Y) = D^2(X) - D^2(Y) = 0$.

$R(X, \frac{X+Y}{2}) = \frac{\text{cov}(X, \frac{X+Y}{2})}{D(X)D(\frac{X+Y}{2})} = \frac{\frac{1}{2}D^2(X)}{\frac{1}{\sqrt{2}}D^2(X)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$.

- (6) Egy mérésorozatban a mérési eredményeket jelölje X_1, X_2, \dots, X_5 . Mennyi az első mérésnek és a mérések átlagának korrelációs együtthatója, azaz $R(X_1, \frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5})$? Mennyi a korrelációs együttható, ha öt mérés helyett n mérést végzünk? A mérések függetlenek, és feltételezzük, hogy az egyes mérési eredmények eloszlása azonos (ami ugyanaz, mint hogy az eloszlásfüggvényük megegyezik).

$\text{cov}(X_1, \bar{X}) = 1/5 D^2(X_1)$

$D(\bar{X}) = D(X_1)/\sqrt{5} \Rightarrow R(X_1, \bar{X}) = 1/\sqrt{5} = 0,4472$.

Általában hasonlóképpen lehet számolni: $R(X_1, \bar{X}) = 1/\sqrt{n}$.

- (7) Legyenek X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók 1 paraméterrel. Mennyi X és Y kovarianciája, illetve korrelációs együtthatója? Mennyi $X + Y$ és $X - Y$ kovarianciája? Mennyi $X + Y$ szórnégyszete? Mennyi $X - Y$ szórnégyszete?

$\text{cov}(X, Y) = R(X, Y) = 0$, hiszen függetlenek.

$\text{cov}(X + Y, X - Y) = D^2(X) - D^2(Y) = 0$ (de nem függetlenek).

$D^2(X + Y) = 2D^2(X) = 2$.

$D^2(X - Y) = 2D^2(X) = 2$.