

#### 4. feladatsor, valószínűségszámítás, 2019. október 2.

- (1) Sokéves megfigyelések szerint egy évben átlagosan 3,42 alkalommal van jégeső. Feltételezzük, hogy a jégesők éves száma Poisson-eloszlású, és hogy a jégesők várható száma megegyezik a megfigyelt átlaggal.
- Mennyi az egy év alatt bekövetkezett jégesők számának szórása?
  - Mennyi annak valószínűsége, hogy egy évben pontosan háromszor van jégeső?
  - Mennyi annak valószínűsége, hogy egy évben legalább négyszer van jégeső?

$\lambda = 3,42$ , úgy választjuk a paramétert, hogy a várható érték megegyezzen a sokéves átlaggal.

a)  $\sqrt{3,42} = 1,849$ .

b)  $\frac{3,42^3}{3!} e^{-3,42} = 0,218$ .

c)  $1 - \left( \frac{3,42^3}{3!} - \frac{3,42^2}{2!} + \frac{3,42^1}{1!} - \frac{3,42^0}{0!} \right) e^{-3,42} = 1 - 0,218 - 0,1913 - 0,1119 - 0,0327 = 0,446$ .

> dpois(3, lambda=3.42)

[1] 0.2180921

> ppois(3, lambda=3.42, lower.tail=F)

[1] 0.4460101

- (2) Egy hivatalba óránként átlagosan 6 ember érkezik. Legyen  $X$  az a valószínűségi változó, hogy negyed óra alatt,  $Y$  az a valószínűségi változó, hogy 30 perc alatt hányan érkeznek a hivatalba. Ezek Poisson-eloszlású valószínűségi változók, a Poisson-folyamat tulajdonságainak megfelelően, azaz a paraméter az intervallum hosszával arányos.

- Mennyi a valószínűsége, hogy negyed óra, illetve 30 perc alatt két ügyfél érkezik?
- Mennyi a valószínűsége, hogy negyed óra alatt egyetlen ügyfél sem érkezik? Ez alapján milyen eloszlású a két ügyfél érkezése között eltelt idő?

Ha óránként átlagosan 6 ember érkezik, akkor negyed óra alatt az érkezők számának várható értéke 1,5, míg fél óra alatt 3. Vagyis azt tesszük fel, hogy  $X$  eloszlása Poisson-eloszlás  $\lambda = 1,5$  paraméterrel,  $Y$  eloszlása Poisson-eloszlás  $\lambda = 3$  paraméterrel. Ezért

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1,5^2}{2!} e^{-1,5} = 25,1\%$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 22,4\%$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1,5^0}{0!} e^{-1,5} = 22,3\%.$$

> dpois(2, lambda=1.5)

[1] 0.251021

> dpois(2, lambda=3)

[1] 0.2240418

> dpois(0, lambda=1.5)

[1] 0.2231302

- (3) Debrecenben számos műszert helyeztünk el a légszennyezettség mérésére. Tegyük fel, hogy az egy napon meghibásodó műszerek száma (amit  $Y$ -nal jelölünk), Poisson-eloszlású, és paramétere 0,1. Számítsuk ki a  $\mathbb{P}(Y = 2)$  valószínűséget, illetve  $Y$  várható értékét és szórását.

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{0,1^2}{2!} e^{-0,1} = 0,00452.$$

$$\mathbb{E}(Y) = 0,1.$$

$$D(Y) = \sqrt{0,1} = 0,316.$$

> dpois(2, lambda=0.1)

[1] 0.004524187

- (4) Bálint minden nap a többtől függetlenül 0,05 valószínűséggel késik el az iskolából. A harmadik késés után igazolatlan órát kap. Jelölje  $X$ , hogy hányadik tanítási napon késik el először, és  $Y$ , hogy hányadik tanítási napon kap először igazolatlan órát.

(a) Mennyi  $\mathbb{P}(X = 5)$ , és mennyi  $\mathbb{P}(Y = 5)$ ?

(b) Mennyi  $X$  várható értéke és szórása?

(c) Mennyi  $Y$  várható értéke és szórása?

(a)  $\mathbb{P}(X = 5) = 0,95^4 \cdot 0,05 = 0,0407$ .

$\mathbb{P}(Y = 5) = 6 \cdot 0,95^2 \cdot 0,05^3 = 0,00067$ .

(b)  $\mathbb{E}(X) = 6$ .  $\mathbb{D}(X) = \sqrt{30} = 5,477$ .

(c)  $\mathbb{E}(Y) = 18$ .  $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{90} = 9,49$ .

- (5) Az előrejelzés szerint Budapesten 40%, Szegeden 20% valószínűséggel fog esni az eső. Annak valószínűsége, hogy mindkét helyen esni fog, 15%.
- (a) Mennyi annak valószínűsége, hogy legalább az egyik városban esni fog az eső?  
 (b) Feltéve, hogy Budapesten esik, mennyi a valószínűsége, hogy Szegeden is esik?  
 (c) Feltéve, hogy Szegeden esik, mennyi a valószínűsége, hogy Budapesten is esik?
- (a)  $\mathbb{P}(B \cup S) = 0,4 + 0,2 - 0,15 = 0,45$   
 (b)  $\mathbb{P}(S|B) = 0,15/0,4 = 0,375$ .  
 (c)  $\mathbb{P}(B|S) = 0,2/0,4 = 0,5$ .
- (6) Hanna minden nap  $1/2$  valószínűséggel négyes,  $1/2$  valószínűséggel hatos villamossal megy egyetemre. A napok egymástól függetlenek. Pénteken elmondja, hogy az öt hétköznap alatt pontosan kétszer jött hatossal. Mennyi a valószínűsége, hogy kedden hatos villamossal érkezett?  
 $2/5 = 0,4$ .
- (7) Háromszor dobunk szabályos dobókockával. Mennyi annak valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4? Feltéve, hogy a dobott számok összege 4, mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás 1-es?  
 A dobott számok összege 4 csak 112, 121, 211 lehet, így annak valószínűsége, hogy az összeg 4:  $3/216 = 0,0139$ . Feltéve, hogy a dobott számok összege 4, az első dobás  $2/3$  valószínűséggel egyes.
- (8) Kétszer dobunk szabályos dobókockával. Feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos, mennyi a valószínűsége, hogy mindkét dobás hatos?  
 $\mathbb{P}(66|\text{van hatos}) = \frac{\mathbb{P}(66)}{\mathbb{P}(\text{van hatos})} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$ .
- (9) Bálintot kirándulni hívják szombatra. Esős időben  $1/10$  valószínűséggel megy el, felhős időben  $4/5$  valószínűséggel, napos időben  $9/10$  valószínűséggel. Az időjárás-előrejelzés szerint a hétvégén 20% valószínűséggel esős, 65% valószínűséggel felhős, 15% valószínűséggel napos idő lesz.
- a) Mennyi a valószínűsége, hogy Bálint a hétvégén elmegy a kirándulásra?  
 b) Bálint szombaton este írja, hogy nem ment kirándulni. Mennyi a valószínűsége, hogy esős idő volt a lakóhelyén aznap?  
 a) A teljes valószínűség tétele alapján:  $\mathbb{P}(\text{megy}) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,65 \cdot 0,8 + 0,15 \cdot 0,9 = 0,675$ .  
 b) A Bayes-tétel alapján:
- $$\mathbb{P}(\text{eső}|\text{nem megy}) = \frac{0,2 \cdot 0,9}{0,2 \cdot 0,9 + 0,65 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,1} = \frac{0,18}{0,325} = 0,5538.$$
- (10) Tamás orvoshoz megy szűrővizsgálatra. A laboratóriumi mérés nem tökéletes: egészséges embereknél 2% valószínűséggel betegséget jelez, míg beteg embereknél 1% valószínűséggel nem mutatja ki a betegséget. Tegyük fel, hogy a betegség gyakorisága a teljes népességben 4%.
- a) Mennyi a valószínűsége, hogy Tamás betegségről szóló leletet fog kapni?  
 b) Tamás megkapja a betegségről szóló leletét. Mennyi a valószínűsége, hogy Tamás beteg?
- (a)  $\mathbb{P}(\text{betegségről szóló lelet}) = 0,96 \cdot 0,02 + 0,04 \cdot 0,99 = 0,0588$ .  
 (b)  $\mathbb{P}(\text{beteg}|\text{betegségről szóló lelet}) = 0,04 \cdot 0,99/0,0588 = 0,6735$ .