3. feladatsor, valószínűségszámítás, 2019. szeptember 25.

(1) A holnap lehulló csapadékmennyiség (milliméterben, kerekítve) $0,6$ valószínűséggel 0 mm, $0,3$ valószínűséggel 1 mm, $0,1$ valószínűséggel 2 mm. Írjuk fel a csapadékmennyiség eloszlását, és számítsuk ki a várható értékét és szórását.

Jelölje X a holnapi csapadékmennyiséget. Az X valószínűségi változó eloszlása (milliméterben): $(0;0,6),(1;0,3),(2;0,1)$. Táblázatban:

lehetséges értékek	0	1	2
valószínűségek	0,6	0,3	0,1

Várható értéke:

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{2} k\cdot\mathbb{P}(X=k)=1\cdot 0,3+2\cdot 0,1=0,5.$$

A szórásnégyzethez:

$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{k=0}^{4} k\cdot\mathbb{P}(X^2=k)=1^2\cdot 0,3+2^2\cdot 0,1=0,7.$$

Ebből

$$D^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=0,7-0,5^2=0,6375\quad\Rightarrow\quad D(X)=0,7985.$$

(2) Jelölje X a márciusi fagyos napok számát. Tegyük fel, hogy

$$\mathbb{P}(X=0)=0,3;\qquad \mathbb{P}(X=1)=0,4;\qquad \mathbb{P}(X=2)=0,2;\qquad \mathbb{P}(X=3)=0,1.$$

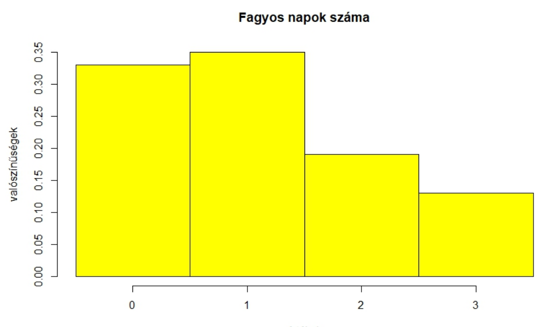
Ábrázoljuk X eloszlását. Mennyi a márciusi fagyos napok számának várható értéke, azaz $\mathbb{E}(X)$? Mennyi a márciusi fagyos napok számának szórása, azaz $D(X)$?

Az X valószínűségi változó eloszlása: $(0;0,3),(1;0,4),(2;0,2),(3;0,1)$. Táblázatban:

lehetséges értékek	0	1	2	3
valószínűségek	0,3	0,4	0,2	0,1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=1\cdot 0,4+2\cdot 0,2+3\cdot 0,1=1,1.\\ \mathbb{E}(X^2)&=1^2\cdot 0,4+2^2\cdot 0,2+3^2\cdot 0,1=2,1.\\ D^2(X)&=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=2,1-1,1^2=0,89\quad\Rightarrow\quad D(X)=0,943.\end{aligned}$$

```
> ertek<-c(0,1,2,3)
> val<-c(0.3, 0.4, 0.2, 0.1)
> minta<-sample(ertek, prob=val, size=100, replace=TRUE)
> minta
[1] 1 0 2 3 1 2 1 2 3 1 1 3 3 3 0 3 1 0 1 3 3 1 1 2 0 1 0 1 2 0 0 0 0 0 0 1 2 3 0 0 1 2 1 3 3 0 3 1 2
0 1 0 1 2 2 2 1 1 2
[60] 0 0 0 2 0 0 1 1 1 0 1 1 1 2 1 0 0 1 2 0 1 0 1 2 0 1 0 3 0 1 2 1 0 2 1 0 1 2 0 0 1
> mean(minta)
[1] 1.12
> sd(minta)
[1] 1.017821
```



A várható érték és a szórás tulajdonságai (itt c valós szám):

$$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y);\qquad \mathbb{E}(cX)=c\mathbb{E}(X);\qquad D(cX)=|c|D(X).$$

Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(X_1 \le t_1, X_2 \le t_2, \ldots, X_n \le t_n) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \le t_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \le t_n)$$

teljesül tetszőleges $t_1, t_2, \ldots, t_n$ valós számokra. Ekkor

$$D^2(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_n).$$

---

(3) Legyenek X, Y, Z független, $\lambda = 3$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

(a) Mennyi X várható értéke és szórása?
A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke és szórása is $1/\lambda$, ezért

$$\mathbb{E}(X) = D(X) = \frac{1}{3}.$$

Y és Z várható értéke és szórása is ugyanennyi.

(b) Mennyi $X + Y + Z$ várható értéke és szórása?
Mivel az összeg várható értéke a várható értékek összege:

$$\mathbb{E}(X + Y + Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Mivel független valószínűségi változók esetén az összeg szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege:

$$\mathbb{D}(X + Y + Z) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) + \mathbb{D}^2(Z)} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58.$$

(c) Mennyi $(X + Y + Z)/3$ várható értéke és szórása?
Mivel cX várható értéke c-szerese X várható értékének:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X + Y + Z}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}(X + Y + Z) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

Mivel cX szórása $|c|$-szerese X szórásának:

$$\mathbb{D}\left(\frac{X + Y + Z}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{D}(X + Y + Z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,19.$$

(d) Mennyi $2X + Y$ várható értéke és szórása?

$$\mathbb{E}(2X + Y) = 2\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Mivel cX szórásnégyzete c^2-szerese X szórásnégyzetének:

$$\mathbb{D}(2X + Y) = \sqrt{\mathbb{D}^2(2X) + \mathbb{D}^2(Y)} = \sqrt{4D^2(X) + D^2(Y)} = \sqrt{5} \cdot D(X) = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,75.$$

(e) Mennyi $2X - Y$ várható értéke és szórása?

$$\mathbb{E}(2X - Y) = 2\mathbb{E}(X) + (-1) \cdot \mathbb{E}(Y) = 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

$$\mathbb{D}(2X - Y) = \sqrt{\mathbb{D}^2(2X) + \mathbb{D}^2((-1)Y)} = \sqrt{4D^2(X) + (-1)^2 \cdot D^2(Y)} = \sqrt{5} \cdot D(X) = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,75.$$

(4) Öt dobókockával dobunk egyszerre. Jelölje X azt, hogy hány hatost dobtunk.
a) Mennyi $\mathbb{P}(X = 5)$?
b) Mennyi $\mathbb{P}(X = 4)$?
c) Mennyi $\mathbb{P}(X = 3)$?
d) Milyen eloszlású X?
e) Mennyi a hatosok számának várható értéke?
f) Mennyi a hatosok számának szórása?

(5) (a) $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{6^5} = 0,000129.$

(b) $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{5 \cdot 5}{6^5} = 0,00321.$

(c) $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{10 \cdot 25}{6^5} = 0,03215.$

(d) X binomiális eloszlású $n = 5$ renddel és $p = 1/6$ paraméterrel.

(e) $\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 5/6 = 0,833.$

(f) $D(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\frac{25}{36}} = 5/6 = 0,833.$

```
> dbinom(5, size=5, prob=1/6)
[1] 0.0001286008
> dbinom(4, size=5, prob=1/6)
[1] 0.003215021
> dbinom(3, size=5, prob=1/6)
[1] 0.03215021
```

(6) Bálint minden nap a többitől függetlenül 0,01 valószínűséggel késik el az egyetemről.
a) Mennyi annak valószínűsége, hogy egy hét (öt hétköznap) alatt pontosan kétszer késik?
b) Milyen eloszlású a novemberi késéseinek száma, ha novemberben 21 tanítási nap van?
c) Mennyi a novemberi késéseinek számának várható értéke?
d) Mennyi a novemberi késéseinek számának szórása?

(a) $\mathbb{P}(\text{pontosan két késés}) = 10 \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^3 = 0,00097.$

(b) Binomiális eloszlású $n = 21$ renddel és $p = 0,01$ paraméterrel.

(c) $n \cdot p = 21 \cdot 0,01 = 0,21.$

(d) $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{21 \cdot 0,01 \cdot 0,99} = 0,4559.$

```
> dbinom(2, size=5, prob=0.01)
[1] 0.000970299
```

(7) Budapesten 10 műszert helyeztünk el a légszennyezettség mérésére. Egy adott napon mindegyik 0,01 valószínűséggel romlik el, ilyenkor nem kapunk aznap mérési adatot. A műszerek működése egymástól független. Jelölje Z, hogy a holnapi napon hány műszer romlik el. Számítsuk ki a $\mathbb{P}(Z = 2)$ valószínűséget, illetve Z várható értékét és szórását.

$\mathbb{P}(Z = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,99^8 \cdot 0,01^2 = 0,00415.$

```
> dbinom(2, size=10, prob=0.01)
[1] 0.004152351
```

$\mathbb{E}(Z) = 10 \cdot 0,01 = 0,1.$

$D(Z) = \sqrt{10 \cdot 0,01 \cdot 0,99} = 0,314.$

(8) Egy üdítőital-automata által adagolt ital mennyisége normális eloszlásúnak tekinthető 0,01 liter szórással. Mennyire állították be az automatát, ha a félliteresnek címkézett palackoknak csak 2%-a tartalmaz 0,5 liternél kevesebbet?

Legyen az adagolt ital mennyisége az X valószínűségi változó, várható értéke (literben) m. Ekkor a következőt tudjuk:

$$\mathbb{P}(X < 0,5) = 0,02.$$

Mivel X normális eloszlású m várható értékkel és $\sigma = 0,01$ szórással:

$$\mathbb{P}(X < 0,5) = \Phi\left(\frac{0,5 - m}{0,01}\right) = 0,02 \quad \Rightarrow \quad \frac{0,5 - m}{0,01} = \Phi^{-1}(0,02) = -\Phi^{-1}(0,98) = -2,05$$

$$0,5 - m = 0,01 \cdot -2,05 \quad \Rightarrow \quad m = 0,5 + 0,01 \cdot 2,05 = 0,52.$$

```
> qnorm(0.02)
[1] -2.053749
> qnorm(0.98)
[1] 2.053749
```

(9) Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggénye az alábbi függvény:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0; \\ 25t^2, & \text{ha } 0 \le t \le 1/5; \\ 1, & \text{ha } t \ge 1. \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy X értéke $0,1$ és $0,15$ közé esik?

(c) Mennyi X várható értéke?

(d) Mennyi X szórása?

A sűrűségfüggvényt az eloszlásfüggvény deriváltjaként kereshetjük meg, amikor létezik:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 50 \cdot x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/5; \\ 1, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy valóban $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx = F(t)$ teljesül minden t-re.
Az eloszlásfüggvény definíciója alapján:

$$\mathbb{P}(0,1 \leq X \leq 0,15) = \mathbb{P}(X \leq 0,15) - \mathbb{P}(X \leq 0,1) = F(0,15) - F(0,1) = 25 \cdot 0,15^2 - 25 \cdot 0,1^2 = 31,25\%.$$

A várható érték definíciója alapján:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{1/5} 50 \cdot x^2 dx = 50 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1/5} = 50 \cdot \frac{1}{5^3 \cdot 3} = 0,13.$$

A szóráshoz először a négyzet várható értékét számítjuk ki:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{0}^{1/5} 50 \cdot x^3 dx = 50 \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{1/5} = 50 \cdot \frac{1}{5^4 \cdot 4} = 0,02.$$

Ezután

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2} = \sqrt{0,02 - 0,13^2} = 0,06.$$