2. feladatsor, valószínűségszámítás, 2019. szeptember 18.

(1) Egy $0,1$ porozitású kőzetmintát vizsgálunk. A porozitást mérve a mérésünk nem pontos, így azt feltételezzük, hogy a mérés során kapott eredmény $0,1$ várható értékű és $0,02$ szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy a mérés során $0,14$-nél kisebb értéket kapunk? Mennyi annak valószínűsége, hogy a mérési hiba $0,02$-nél több?

$\Phi\left(\frac{0,14-0,1}{0,02}\right) = \Phi(2) = 0,9772.$

```
> pnorm(0.14, mean=0.1, sd=0.02)
[1] 0.9772499
```

$$\mathbb{P}(|X-0,1|>0,02) = \mathbb{P}(X>0,12)+\mathbb{P}(X<0,08) = 1-\mathbb{P}\left(\frac{0,12-0,1}{0,02}\right)+\mathbb{P}\left(\frac{0,08-0,1}{0,02}\right) =$$
$$= 1-Phi(1)+\Phi(-1) = 2-2\Phi(1) = 0,3173$$

```
> pnorm(0.12, mean=0.1, sd=0.02, lower.tail=F)+pnorm(0.08, mean=0.1, sd=0.02)
[1] 0.3173105
```

Használhatjuk az alábbiakat: $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$ *minden* x*-re, valamint* $\Phi(0,5) = 0,6915$, $\Phi(1) = 0,8413$, $\Phi(2) = 0,9772$, $\Phi(3) = 0,9987$.

(2) Tegyük fel, hogy a holnapi középhőmérséklet, X normális eloszlású valószínűségi változó 1 várható értékkel és 2 szórással (azaz $X \sim N(1,4)$), Celsius-fokban mérve.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy holnap $0°$ alatt lesz a középhőmérséklet?

$\mathbb{P}(X<0) = \mathbb{P}\left(\frac{X-1}{2} < -\frac{1}{2}\right) = \Phi(-0,5) = 1-\Phi(0,5) = 1-0,6915 = 0,3085.$

```
> pnorm(0, mean=1, sd=2)
[1] 0.3085375
```

b) Mennyi a valószínűsége, hogy holnap $-1°C$ és $3°C$ között lesz a középhőmérséklet?

$\mathbb{P}(-1<X<3) = \mathbb{P}\left(-1 < \frac{X-1}{2} < 1\right) = \Phi(1)-\Phi(-1) = 2\Phi(1)-1 = 2\cdot 0,8413-1 = 0,6826.$

```
> pnorm(3, mean=1, sd=2)-pnorm(-1, mean=1, sd=2)
[1] 0.6826895
```

c) Határozzuk meg $E(X^2)$ értékét!

$E(X^2) = D^2(X)+\mathbb{E}(X)^2 = 2^2+1^1 = 5$, hiszen a szórásnégyzet definíciója alapján $D^2(X) = \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$.

d) $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|>D(X))$; $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|>2D(X))$, $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|>3D(X))$.

$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|>D(X)) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X-1}{2}\right|>1\right) = 1-\Phi(1)+\Phi(-1) = 2(1-\Phi(1)) = 0,3174.$
$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|>2D(X)) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X-1}{2}\right|>2\right) = 1-\Phi(2)+\Phi(-2) = 2(1-\Phi(2)) = 0,0456.$
$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|>3D(X)) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X-1}{2}\right|>3\right) = 1-\Phi(3)+\Phi(-3) = 2(1-\Phi(3)) = 0,0026.$

(3) Korábbi méréseink alapján feltételezzük, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember testmagassága centiméterben mérve 176 várható értékű és 64 szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember
a) 176 cm-nél alacsonyabb?
b) 184 cm-nél alacsonyabb?
c) 168 cm-nél magasabb, de 184 cm-nél alacsonyabb?
d) 160 cm-nél magasabb, de 192 cm-nél alacsonyabb?
e) 192 cm-nél magasabb, feltéve, hogy 184 cm-nél magasabb?
f) 176 cm-nél alacsonyabb, feltéve, hogy 184 cm-nél alacsonyabb?

a) $\Phi(0) = 1/2.$
b) $\Phi(184-176)/8) = \Phi(1) = 0,8413.$
c) $\Phi(184-176)/8)-\Phi((168-184)/8 = \Phi(1)-\Phi(-2) = 0,8413-1+0,9772 = 0,8185.$
d) $\Phi((192-176)/8-\Phi((160-176)/8) = \Phi(2)-\Phi(-2) = 2\Phi(2)-1 = 0,9544.$
e) $[1-\Phi(2)]/[1-\Phi(1)] = 0,1437.$
f) $\Phi(0)-\Phi(1) = 0,5943.$

(4) Jelölje Y egy radioaktív részecske bomlási idejét (napban), és tegyük fel, hogy Y exponenciális eloszlású, várható értéke 3.
a) Mennyi Y eloszlásának paramétere?
b) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a részecske 3 éven át nem bomlik el.
c) Mennyi annak valószínűsége, hogy a részecske a második évben bomlik el, azaz $\mathbb{P}(1 \leq Y \leq 2)$?
d) Határozzuk meg a részecske bomlási idejének szórását, azaz $D(Y)$-et.

a) $\lambda = 1/3$, mert λ paraméterű exponenciális eloszlásnál $\mathbb{E}(Y) = 1/\lambda$.
b) $\mathbb{P}(Y \geq 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-3\cdot 1/3}) = e^{-3\cdot 1/3} = \frac{1}{e} = 0,3679$.

```
> pexp(3, rate=1/3, lower.tail=FALSE)
[1] 0.3678794
```

c) $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2/3} - (1 - e^{-1/3}) = e^{-1/3} - e^{-2/3} = 0,7165 - 0,5134 = 0,2031$.

```
> pexp(2, rate=1/3)-pexp(1, rate=1/3)
[1] 0.2031142
```

d) $D(X) = \frac{1}{\lambda} = 3$, mert λ paraméterű exponenciális eloszlásnál $\mathbb{E}(X) = D(X) = 1/\lambda$.

(5) Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f, ahol $f(x) = 2x$, ha $0 < x < 1$, és 0 különben.
a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(0 \leq X < 1/2)$ és a $\mathbb{P}(1/4 \leq X < 1/2)$ valószínűségeket.
b) Mennyi X várható értéke?
c) Mennyi $\mathbb{E}(X^2)$?
d) Mennyi X szórásnégyzete?

a) $\mathbb{P}(0 \leq X < 1/2) = \int_0^{1/2} 2t dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} = 0,125$.
$\mathbb{P}(1/4 \leq X < 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} 2t dt = [t^2]_{1/4}^{1/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = 0,1875$.
b) $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 t \cdot 2t dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.
c) $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 t^2 \cdot 2t dt = \left[\frac{t^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.
d) $D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{5}{18} = 0,2778$.