1. feladatsor, valószínűségszámítás, 2019. szeptember 11–13.

(1) Csomagot várunk, a futár 8 és 10 óra között **egyenletes eloszlás** szerint választott időpontban érkezik, azaz az érkezési időpontjának (az X valószínűségi változónak) az eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 8; \\ \frac{t-8}{2}, & 8 < t < 10 \\ 1, & t \geq 10. \end{cases}$$

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a futár még 9 óra előtt megérkezik?

$$\mathbb{P}(X < 9) = \mathbb{P}(X \leq 9) = F(9) = \frac{9-8}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a futár 9 és 11 óra között jön?

$$\mathbb{P}(9 < X < 11) = \mathbb{P}(X \leq 11) - \mathbb{P}(X \leq 9) = F(11) - F(9) = 1 - \frac{9-8}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy a futár 10 óra után jön?

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - F(10) = 0.$$

(d) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét, azaz keressünk egy olyan f függvényt, melyre

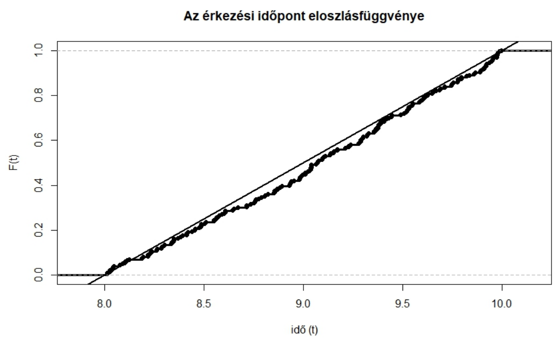
$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

teljesül minden t számra.

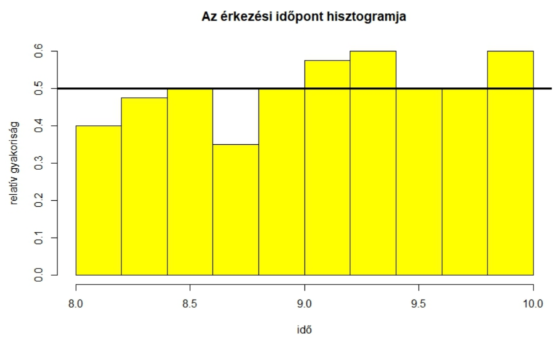
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } 8 \leq x \leq 10; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ábra az R programban: mintaátlag és tapasztalati eloszlásfüggvény $n = 200$ elemű mintából (a t-nél nem nagyobb megfigyelések aránya) és a valódi eloszlásfüggvény

```
> minta<-runif(200, 8, 10)
> mean(minta)
[1] 9.06036
> plot(ecdf(minta), lwd="3", xlab="idő (t)", ylab="F(t)", main="Az érkezési időpont eloszlásfüggvénye")
> abline(-4, 0.5, lwd="2", from=8, to=10)
```




```
Hisztogram ugyanebből a mintából:
> hist(minta, col="yellow", main="Az érkezési időpont hisztogramja", freq=F, xlab="idő", ylab="relatív gyakoriság")
> abline(0.5, 0, lwd="3")
```



(2) Tegyük fel, hogy egy adott helyen két földrengés között eltelő idő évben számolva **exponenciális eloszlású** $\lambda = 3$ paraméterrel, azaz eloszlásfüggvénye

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 1 - e^{-3t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Legyen X az, hogy a következő két földrengés között mennyi idő telik el.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább fél év eltelik?

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - (1 - e^{-3/2}) = e^{-3/2} = 22,3\%.$$

```
 > pexp(0.5, rate=3, lower.tail=F)
[1] 0.2231302
```

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb két év telik el két földrengés között?

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-3\cdot 2} = 1 - e^{-6} = 99,8\%$$

```
 > pexp(2, rate=3)
[1] 0.9975212
```

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy X értéke 1 és 2 közé esik?

$$\mathbb{P}(1 < X < 2) = \mathbb{P}(X \leq 2) - \mathbb{P}(X \leq 1) = F(2) - F(1) = (1 - e^{-6}) - (1 - e^{-3}) = e^{-3} - e^{-6} = 4,7\%$$

```
 > pexp(2, rate=3)-pexp(1, rate=3)
[1] 0.04730832
```

(d) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét, azaz keressünk egy olyan f függvényt, melyre

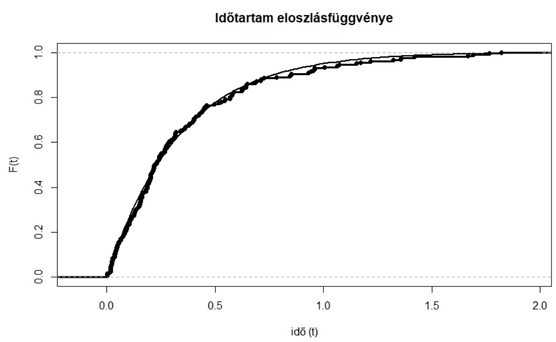
$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

teljesül minden t számra. A sűrűségfüggvény, ha létezik, az eloszlásfüggvény deriváltja, így

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 3e^{-3x}, x \geq 0. \end{cases}$$

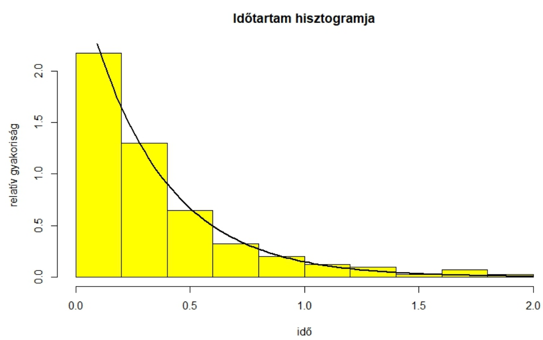
A tapasztalati eloszlásfüggvény 200 elemű mintából és a valódi eloszlásfüggvény:

```
> fold<-rexp(200, rate=3)
> mean(fold)
[1] 0.3529602
> plot(ecdf(fold), lwd="3", main="Időtartam eloszlásfüggvénye", xlab="idő (t)", ylab="F(t)")
> curve(1-exp(-3*x), from=0, to=2, add=T, lwd="2")
```



Hisztogram 200 elemű mintából:

```
> hist(fold, col="yellow", main="Időtartam hisztogramja", xlab="idő", ylab="relatív gyakoriság", freq=F)
> curve(3*exp(-3*x), from=0, to=2,lwd="2", add=T)
```



(3) Tegyük fel, hogy egy ember reakcióideje másodpercben mérve exponenciális eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) Határozzuk meg a reakcióidő eloszlás– és sűrűségfüggvényét. Az eloszlásfüggvény:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 1 - e^{-2t}, t \geq 0. \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 2e^{-2x}, x \geq 0. \end{cases}$$

(b) a reakcióideje legalább $0,5$ másodperc;

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - (1 - e^{-1/2\cdot 2}) = e^{-1} = 36,8\%.$$

```
> pexp(0.5, rate=2, lower.tail=F)
[1] 0.3678794
```

(c) a reakcióideje legalább 1 másodperc;

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-2\cdot 1}) = e^{-2} = 13,5\%.$$

```
> pexp(1, rate=2, lower.tail=F)
[1] 0.1353353
```

(d) a reakcióideje legalább 2 másodperc;

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2\cdot 2}) = e^{-4} = 1,8\%.$$

```
> pexp(2, rate=2, lower.tail=F)
[1] 0.01831564
```

(e) a reakcióideje 1 és 2 másodperc közé esik.

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2) = \mathbb{P}(X \leq 2) - \mathbb{P}(X \leq 1) = F(2) - F(1) = (1 - e^{-4}) - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-4} = 11,7\%$$

> pexp(2, rate=2)-pexp(1, rate=2)
[1] 0.1170196

(f) Milyen t-re igaz, hogy a reakcióidő pontosan $1/2$ valószínűséggel lesz t-nél kisebb?

$$P(X < t) = \mathbb{P}(X \leq t) = F(t) = 1 - e^{-2t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-2t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2t = \log\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\log 2}{2} = 0,35.$$

(4) Egy telefonhívás délután 5 és 7 közötti időben bármikor egyenletes eloszlás szerinti valószínűséggel fog beérkezni. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 előtt érkezik a hívás? Minek nagyobb a valószínűsége: hogy a hívás 5 és fél 6 között, vagy hogy 6 és 7 között érkezik?

Legyen X a hívás időpontja. Ekkor X eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 5; \\ \frac{t-5}{2}, & 5 < t < 7 \\ 1, & t \geq 7. \end{cases}$$

Ezért

$$\mathbb{P}(X \leq 6) = F(6) = \frac{1}{2} = 50\%.$$

```
> punif(6, 5, 7)
[1] 0.5
```

$$\mathbb{P}(5 \leq X \leq 5,5) = \mathbb{P}(X \leq 5,5) - \mathbb{P}(5) = F(5,5) - F(5) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} = 25\%.$$

```
> punif(5.5, 5, 7)-punif(5, 5, 7)
[1] 0.25
```

$$\mathbb{P}(6 \leq X \leq 7) = \mathbb{P}(X \leq 7) - \mathbb{P}(\leq 6) = F(7) - F(6) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

```
> punif(7, 5, 7)-punif(6, 5, 7)
[1] 0.5
```

Vagyis annak valószínűsége nagyobb, hogy 6 és 7 óra között jön (annak megfelelően, hogy ez egy kétszer olyan hosszú intervallum, és még az $[5,7]$ intervallumon belül).

(5) Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ c \cdot x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Mennyi c értéke? Mennyi annak valószínűsége, hogy X értéke $1/4$ és $1/2$ közé esik? Mennyi a valószínűsége, hogy $1/2$ és $3/4$ közé esik?

Minden sűrűségfüggvényre igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Most

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 c\cdot x\,dx = c\int_0^1 x\,dx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^1 = c\cdot\frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2.$$

Általában, ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f, akkor

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

teljesül tetszőleges $a < b$ esetén. Ezért annak valószínűsége, hogy X értéke $1/4$ és $1/2$ közé esik:

$$\mathbb{P}(1/4 \le X \le 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} f(x)\,dx = \int_{1/4}^{1/2} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{x=1/4}^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} = 18,75\%.$$

Hasonlóképpen annak valószínűsége, hogy X értéke $1/2$ és $3/4$ közé esik:

$$\mathbb{P}(1/2 \le X \le 3/4) = \int_{1/2}^{3/4} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{3/4} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{x=1/2}^{3/4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16} = 31,25\%.$$

(6) **Házi feladat szeptember 20., 13:00-ig** Válasszon három tetszőleges pozitív számot $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, illetve egy $n \ge 100$ pozitív egészt.

(a) Sorsoljon n elemű mintát $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ paraméterű exponenciális eloszlásokból, és készítse el mindegyikből a hisztogramot.

(b) Melyik λ paraméter esetén a legnagyobb annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke 3-nál több?

(c) Melyik paraméter esetén lett a legnagyobb a mintaátlag?