Hipotézisvizsgálat (9. előadás)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ olyan valószínűségi változók, melyek **eloszlása nem ismert**, pontos eloszlásukat a $\vartheta \in \Theta$ paramétervektor írja le.

Nullhipotézis (null hypothesis). $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis (alternative hypothesis). $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

A nullhipotézist **elutasítjuk**, ha a megfigyelések vektora a B_1 kritikus tartományba esik, azaz $\underline{X} \in B_1$ esetén; különben **elfogadjuk**.

- **Elsőfajú hibát** vétünk, ha H_0 igaz, és elutasítjuk.
- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance) az elsőfajú hibák valószínűségének supremuma:
$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\vartheta(\underline{X} \in B_1).$$
- **Másodfajú hibát** vétünk, ha H_0 nem igaz, és elfogadjuk.
- A próba **erőfüggvénye** az alábbi $\beta : \Theta_1 \to [0, 1]$ függvény, ami a jó döntés valószínűségét adja meg $\vartheta \in \Theta_1$ esetén:
$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(\underline{X} \in B_1) \qquad (\vartheta \in \Theta_1).$$

Hipotézisvizsgálat: *p*-érték

Definíció

Egy hipotézisvizsgálati feladatban a p-érték (p-value) a legnagyobb olyan szignifikanciaszint, ami mellett H_0-t elfogadjuk.

Vagyis ha α a szignifikanciaszint (legnagyobb elsőfajú hibavalószínűség), akkor

$p < \alpha$ esetén elutasítjuk H_0-t, szignifikáns eltérés H_0-tól.

$p \geq \alpha$ esetén elfogadjuk H_0-t, nincs szignifikáns eltérés H_0-tól, nem volt elég bizonyíték H_1-re.

A szokásos $\alpha = 0,05$ értékkel: $p < 0,05$ esetén **elutasítjuk a nullhipotézist, szignifikáns eltérés van**, különben elfogadjuk a nullhipotézist, nincs szignifikáns eltérés.

Minél kisebb a *p*-érték, annál jelentősebb az eltérés a nullhipotézistől.

Nagy mintaelemszám esetén kis eltérés is szignifikáns. A próba ereje használható annak ellenőrzésére, hogy nem volt-e túl érzékeny az eljárás.

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$ (az átlag a centrális határeloszlás-tétel alapján közel normális eloszlású)

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$ (az átlag a centrális határeloszlás-tétel alapján közel normális eloszlású)

- z-**próba** (vagy u-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a** σ **szórás ismert**
- t-**próba** (vagy Student-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a** σ **szórás nem ismert** (csak az s_n^* korrigálat tapasztalati szórás, ami az adatokból számolható)
- F-**próba**: **szórásra** vonatkozó hipotézis esetén

Korrigált tapasztalati szórás (itt $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ az átlag):

$$s_n^* = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \overline{X}^2\right)}$$

Kétmintás t-próba: példa

Két helyszínről származó egy-egy kőzetminta porozitását mértük meg ugyanazzal a mérési eljárással. Az alábbi eredmények adódtak.

X	0,25	0,22	0,24	0,19	0,21	0,22	0,23	0,17	0,19	0,25
Y	0,19	0,22	0,2	0,15	0,25	0,18	0,21	0,22		

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások:

$$\overline{X} = \mathbf{0,217}, \qquad s_n^*(X) = 0,027, \qquad \overline{Y} = \mathbf{0,203}, \qquad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a porozitás az X helyszínen szignifikánsan több az Y helyszínről származó minta porozitásánál?

Kétmintás, egyoldali, párosítatlan Student-féle t-próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample one-sided unpaired Student t-test).

$X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Egyoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 \leq m_2$; $H_1 : m_1 > m_2$.

Kétmintás, egyoldali, párosítatlan Student-féle t-próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample one-sided unpaired Student t-test).

$X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Egyoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 \leq m_2$; $\quad H_1 : m_1 > m_2$.

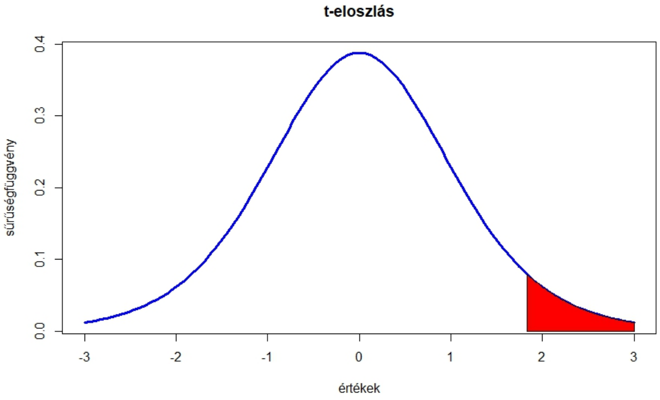
Próbastatisztika (eloszlása t-eloszlás $m_1 = m_2$ mellett):

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Ha $t > \overline{t}_{n_1+n_2-2,\, 1-\alpha}$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $\overline{t}_{n_1+n_2-2,\, 1-\alpha}$ kritikus érték az $f = n_1 + n_2 - 2$ szabadsági fokú **egyoldali** t-próba kritikus értéke α terjedelem mellett (a megfelelő eloszlás $1 - \alpha$-kvantilise).

Ha $p < \alpha$: elvetjük H_0-t, az első várható érték szignifikánsan nagyobb a másodiknál.

t-eloszlás egyoldali kritikus értékei



Az $f = 9$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű egyoldali t-próba kritikus értéke: $\overline{t}_{9,0,05} = 1,83$.

Kétmintás t-próba: példa

Két helyszínről származó egy-egy kőzetminta porozitását mértük meg ugyanazzal a mérési eljárással, az X helyszínről származóét tízszer, az Y helyszínről származóét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások így alakultak:

$$\overline{X} = 0,217, \qquad s_n^*(X) = 0,027, \qquad \overline{Y} = 0,203, \qquad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X helyszínről származó kőzetminta tömege szignifikánsan nagyobb az Y helyszínről származó kőzetmintáétól?

Kétmintás t-próba: példa

Két helyszínről származó egy-egy kőzetminta porozitását mértük meg ugyanazzal a mérési eljárással, az X helyszínről származóét tízszer, az Y helyszínről származóét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások így alakultak:

$$\overline{X} = 0,217, \qquad s_n^*(X) = 0,027, \qquad \overline{Y} = 0,203, \qquad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X helyszínről származó kőzetminta tömege szignifikánsan nagyobb az Y helyszínről származó kőzetmintá-ától?

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Behelyettesítve:

$$t = \frac{0,217 - 0,203}{\sqrt{9 \cdot 0,027^2 + 7 \cdot 0,03^2}} \cdot \sqrt{\frac{80 \cdot 16}{18}} = 1,04.$$

Kétmintás t-próba: példa

Két helyszínről származó egy-egy kőzetminta porozitását mértük meg ugyanazzal a mérési eljárással, az X helyszínről származóét tízszer, az Y helyszínről származóét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások így alakultak:

$$\overline{X} = 0,217, \qquad s_n^*(X) = 0,027, \qquad \overline{Y} = 0,203, \qquad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X helyszínről származó kőzetminta tömege szignifikánsan nagyobb az Y helyszínről származó kőzetmintáétól?

$H_0 : m_1 \leq m_2$, $H_1 : m_1 > m_2$

A próbastatisztika értéke: $t = 1,04$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$ szabadsági fokú egyoldali t-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett: $\overline{t}_{16,0,95} = 1,746$.

Kétmintás t-próba: példa

Két helyszínről származó egy-egy kőzetminta porozitását mértük meg ugyanazzal a mérési eljárással, az X helyszínről származóét tízszer, az Y helyszínről származóét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások így alakultak:

$$\overline{X} = 0,217, \qquad s_n^*(X) = 0,027, \qquad \overline{Y} = 0,203, \qquad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X helyszínről származó kőzetminta tömege szignifikánsan nagyobb az Y helyszínről származó kőzetmintáétól?

$H_0 : m_1 \leq m_2$, $H_1 : m_1 > m_2$

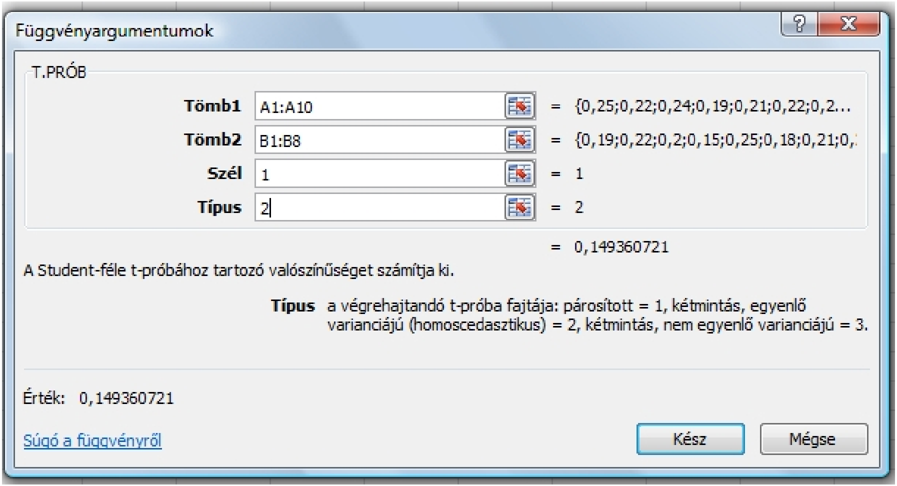
A próbastatisztika értéke: $t = 1,04$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$ szabadsági fokú egyoldali t-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett: $\bar{t}_{16,0,95} = 1,746$.

Itt $t = 1,04 < 1,746 = \bar{t}_{16,0,95}$, ezért **elfogadjuk H_0-t**. Az X típusú vaj tömege **nem haladja meg szignifikánsan** az Y típusúét.

p-érték: 0,149>0,05

Kétmintás t-próba: ugyanez a példa Excelben



Kétmintás t-próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ($X_1, \ldots, X_{20}$ az első minta, $Y_1, \ldots, Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = \mathbf{18,4}, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = \mathbf{19,9}, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom?

Kétmintás, kétoldali, párosítatlan Student-féle t-próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample two-sided unpaired Student t-test).

$X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2$; $\quad H_1 : m_1 \neq m_2$.

Kétmintás, kétoldali, párosítatlan Student-féle t-próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample two-sided unpaired Student t-test).

$X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2$; $\quad H_1 : m_1 \neq m_2$.

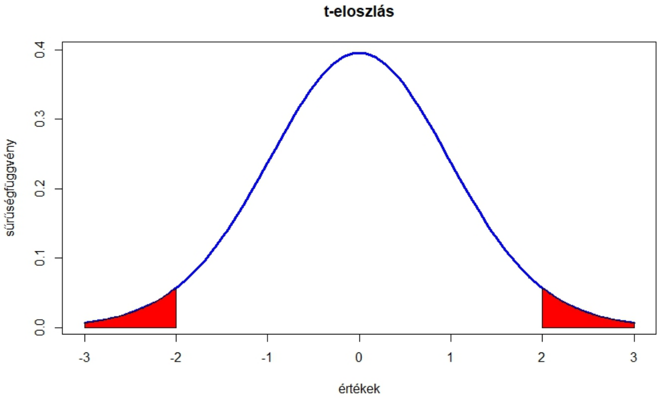
Próbastatisztika (eloszlása t-eloszlás H_0 mellett):

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Ha $|t| > t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$ kritikus érték az $f = n_1 + n_2 - 2$ szabadsági fokú **kétoldali** t-próba kritikus értéke α terjedelem mellett (a megfelelő eloszlás $1 - \alpha/2$-kvantilise).

Ha $p < \alpha$: elvetjük H_0-t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

Kétoldali t-próba kritikus értékei



Az $f = 29$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali t-próba kritikus értéke: $t_{29;0,05} = 2,04$.

Kétmintás t-próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ($X_1, \ldots, X_{20}$ az első minta, $Y_1, \ldots, Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = \mathbf{18,4}, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = \mathbf{19,9}, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**, **azonos szórásúak**.

Kétmintás t-próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ($X_1, \ldots, X_{20}$ az első minta, $Y_1, \ldots, Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = \mathbf{18,4}, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = \mathbf{19,9}, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**, **azonos szórásúak**.

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Behelyettesítve:

$$t = \frac{18,4 - 19,9}{\sqrt{19 \cdot 1,2^2 + 11 \cdot 1,3^2}} \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 12 \cdot 30}{32}} = -3,3.$$

Kétmintás t-próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ($X_1, \ldots, X_{20}$ az első minta, $Y_1, \ldots, Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = \mathbf{18,4}, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = \mathbf{19,9}, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$H_0 : m_1 = m_2$, $H_1 : m_1 \neq m_2$

A próbastatisztika értéke: $t = -3,3$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$ szabadsági fokú **kétoldali** t-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett: $t_{16,0,95} = 2,042$.

Kétmintás t-próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ($X_1, \ldots, X_{20}$ az első minta, $Y_1, \ldots, Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = \mathbf{18,4}, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = \mathbf{19,9}, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$H_0 : m_1 = m_2$, $H_1 : m_1 \neq m_2$

A próbastatisztika értéke: $t = -3,3$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$ szabadsági fokú **kétoldali** t-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett: $t_{16,0,95} = 2,042$.

Itt $|t| = 3,3 > 2,042 = t_{30,0,975}$, ezért **elutasítjuk H_0-t**. A kétféle joghurt cukortartalma **szignifikánsan különböző**

Kétmintás t-próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ($X_1, \ldots, X_{20}$ az első minta, $Y_1, \ldots, Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = \mathbf{18,4}, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = \mathbf{19,9}, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$H_0 : m_1 = m_2$, $H_1 : m_1 \neq m_2$

A próbastatisztika értéke: $t = -3,3$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$ szabadsági fokú **kétoldali** t-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett: $t_{16,0,95} = 2,042$.

Itt $|t| = 3,3 > 2,042 = t_{30,0,975}$, ezért **elutasítjuk H_0-t**. A kétféle joghurt cukortartalma **szignifikánsan különböző** – ha a szórások azonosak, és a próba alkalmazható (ezt eddig feltettük).

Normális eloszlásra vonatkozó kétmintás próbák

Az alábbiakat kell ellenőrizni kétmintás próbáknál:

- A minta **normális eloszlású**, vagy a mintaelemszám elég nagy (a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású).

Normális eloszlásra vonatkozó kétmintás próbák

Az alábbiakat kell ellenőrizni kétmintás próbáknál:

- A minta **normális eloszlású**, vagy a mintaelemszám elég nagy (a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású).
- Kétmintás esetben: a **két minta egymástól független** (''unpaired'' eset). Ha a két minta természetes módon párosítható, **párosított** (''paired'') próba alkalmazható. Példa: megmérjük húsz ember vérnyomását egy adott napon reggel és este. Igaz-e, hogy a reggeli érték jelentősen eltér az estitől?
- Ha a **szórásokról feltételezhetjük, hogy megegyeznek**: a Student-féle t-próba alkalmazható.
- Ha a **szórásokról nem tételezhetjük fel, hogy megegyeznek**: a Welch-féle t-próba alkalmazható.

Példa: párosított t-próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	**533**	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	**540**	143

Példa: párosított t-próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	**533**	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	**540**	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired) t-próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel.

$H_0 : m_1 \geq m_2$, $H_1 : m_1 < m_2$, ahol m_1 a budapesti, m_2 a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

Példa: párosított t-próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	**533**	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	**540**	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired) t-próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel.

$H_0 : m_1 \geq m_2$, $H_1 : m_1 < m_2$, ahol m_1 a budapesti, m_2 a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

A próbát elvégezve a p-értékre $0,366$ adódott.

Példa: párosított t-próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	**533**	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	**540**	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired) t-próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel.

$H_0 : m_1 \geq m_2$, $H_1 : m_1 < m_2$, ahol m_1 a budapesti, m_2 a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

A próbát elvégezve a p-értékre $0,366$ adódott.

Elfogadjuk a nullhipotézist, az adatok alapján Szegeden nem több szignifikánsan a csapadékmennyiség várható értéke, mint Budapesten.

Welsh-féle t-próba

A **várható érték összehasonlítására** párosítatlan esetben (two-sample two-sided unpaired Welch t-test). Legyenek $X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma_2^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, ahol $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2$; $\quad H_1 : m_1 \neq m_2$.

Próbastatisztika:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_{n_1}^{*2}(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^{*2}(Y)}{n_2}}}.$$

Ha $|t| > t_{f,1-\alpha}$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $t_{f,1-\alpha}$ kritikus érték az f szabadsági fokú **kétoldali** t-próba kritikus értéke α terjedelem mellett (a megfelelő eloszlás $1 - \alpha/2$-kvantilise).

Szabadsági fok:

$$f \approx \frac{\frac{s_{n_1}^{*2}(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^{*2}(Y)}{n_2}}{\frac{s_{n_1}^{*4}(X)}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_{n_2}^{*4}(Y)}{n_2^2(n_2-1)}}.$$

Ha $p < \alpha$: elutasítjuk H_0-t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

F-próba

Független normális eloszlású minták **szórásának** összehasonlítására.

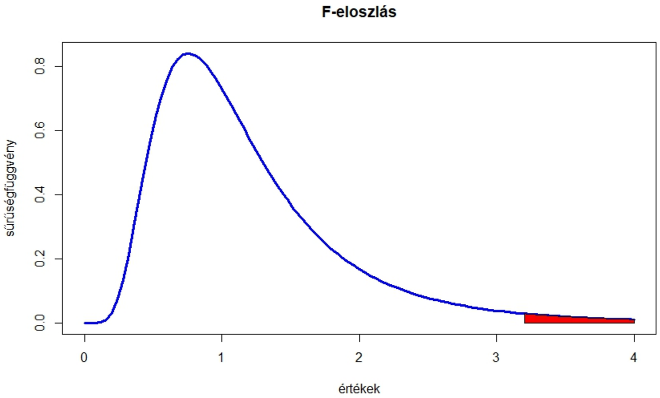
- Legyenek most $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ független normális eloszlású valószínűségi változók, ahol $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$. Itt $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlen paraméterek.
- Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.
- Próbastatisztika (eloszlása F-eloszlás H_0 mellett):

$$F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}}.$$

- Ha $F > F_{n_1-1, n_2-1}$ vagy $1/F > F_{n_2-1, n_1-1}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk, ahol F_{f_1, f_2} az f_1, f_2 szabadsági fokú az F-eloszlás $1-\alpha/2$-kvantilise.

$p < 0,05$: a szórások szignifikánsan eltérnek.

Az F-próba kritikus értéke



Az F-próba kritikus értéke: $F_{19,11} = 3,24$, ez az eloszlás $1-\alpha/2 = 0,975$-kvantilise

Kétmintás F-próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások ($X_1, \ldots, X_{20}$ az első minta, $Y_1, \ldots, Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = 18,4, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = 19,9, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

Kétmintás F-próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások ($X_1, \ldots, X_{20}$ az első minta, $Y_1, \ldots, Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = 18,4, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = 19,9, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$, $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

A próbastatisztika értéke: $F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}} = \frac{1,2^2}{1,3^2} = 0,85$, és $\frac{1}{F} = \frac{1,3^2}{1,2^2} = 1,17$.

Az $(f_1, f_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1) = (19, 11)$ szabadsági fokú F-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ esetén: $3,24$, míg az $(f_2, f_1) = (n_2 - 1, n_1 - 1) = (11, 19)$ szabadsági fok esetén $2,76$.

Kétmintás F-próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások ($X_1, \ldots, X_{20}$ az első minta, $Y_1, \ldots, Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = 18,4, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = 19,9, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$, $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

A próbastatisztika értéke: $F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}} = \frac{1,2^2}{1,3^2} = 0,85$, és $\frac{1}{F} = \frac{1,3^2}{1,2^2} = 1,17$.

Az $(f_1, f_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1) = (19, 11)$ szabadsági fokú F-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ esetén: $3,24$, míg az $(f_2, f_1) = (n_2 - 1, n_1 - 1) = (11, 19)$ szabadsági fok esetén $2,76$.

Mivel $F < 3,24$ és $1/F < 2,76$, **elfogadjuk a nullhipotézist**, a szórások nem térnek el szignifikánsan, és **a kétmintás t-próba valóban alkalmazható**.

χ^2-próba: illeszkedésvizsgálat

Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ teljes eseményrendszer, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ pedig olyan nemnegatív számok, melyek összege 1.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$ minden $k = 1, 2, \ldots, r$-re.

$H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq p_k$ valamelyik $k = 1, 2, \ldots, r$-re.

- n független megfigyelést végzünk.
- N_k: hányszor következett be A_k.
- Ha van k, hogy $N_k < 4$: néhány osztályt össze kell vonnunk, hogy a próbát alkalmazhassuk (vagyis A_j és A_k helyett $A_j \cup A_k$-t és $p_j + p_k$-t tekintjük).
- Próbastatisztika:
$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

χ^2-próba

Adott $(A_k)_{k=1}^r$ teljes eseményrendszer, és $(p_k)_{k=1}^r$ számok: $\sum_{k=1}^r p_k = 1$.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$ minden $k = 1, 2, \ldots, r$-re. H_1: a nullhipotézis nem igaz

Próbastatisztika (feltéve, hogy $N_k \geq 4$ minden k-ra):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

χ^2-próba

Adott $(A_k)_{k=1}^r$ teljes eseményrendszer, és $(p_k)_{k=1}^r$ számok: $\sum_{k=1}^r p_k = 1$.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$ minden $k = 1, 2, \ldots, r$-re. H_1: a nullhipotézis nem igaz

Próbastatisztika (feltéve, hogy $N_k \geq 4$ minden k-ra):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

Legyen c_{krit} az $f = r - 1$ szabadsági fokú χ^2-próba kritikus értéke α terjedelem (szignifikanciaszint) mellett.

$\chi^2 > c_{\mathrm{krit}}$ vagy $p < \alpha$: elutasítjuk H_0-t, az eloszlás szignifikánsan eltér (p_k)-tól.

$\chi^2 \leq c_{\mathrm{krit}}$ vagy $p \geq \alpha$: elfogadjuk H_0-t, az eloszlás nem tér el szignifikánsan (p_k)-tól.

χ^2-próba

Adott $(A_k)_{k=1}^r$ teljes eseményrendszer, és $(p_k)_{k=1}^r$ számok: $\sum_{k=1}^r p_k = 1$.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$ minden $k = 1, 2, \ldots, r$-re. H_1: a nullhipotézis nem igaz

Próbastatisztika (feltéve, hogy $N_i \geq 4$ minden k-ra):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

Legyen c_{krit} az $f = r - 1$ szabadsági fokú χ^2-próba kritikus értéke α terjedelem (szignifikanciaszint) mellett.

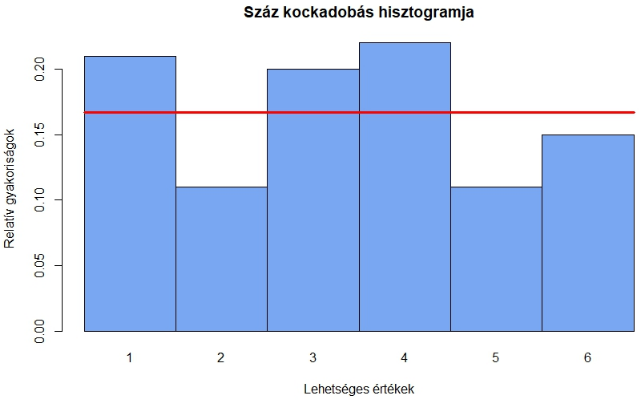
Ez az $f = r - 1$ szabadsági fokú χ^2-eloszlás $1 - \alpha$-kvantilise, vagyis

$$\mathbb{P}(Z_1^2 + \ldots + Z_f^2 < c_{\mathrm{krit}}) = 1 - \alpha,$$

ahol $Z_1, \ldots, Z_f$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

χ^2-próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$-nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?



χ^2-próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$-nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

χ^2-próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$-nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

Minden szám legalább négyszer előfordult, alkalmazhatjuk a χ^2-próbát. A_i: i-t dobunk, $r = 6$, $p_k = 1/6$, $k = 1, 2, \dots, 6$.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k-ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k-ra

χ^2-próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$-nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

Minden szám legalább négyszer előfordult, alkalmazhatjuk a χ^2-próbát. A_i: i-t dobunk, $r = 6$, $p_k = 1/6$, $k = 1, 2, \ldots, 6$.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k-ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k-ra

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k} = \frac{(21 - 100 \cdot 1/6)^2}{100 \cdot 1/6} + \frac{(11 - 100 \cdot 1/6)^2}{100 \cdot 1/6} + \ldots + \frac{(15 - 100 \cdot 1/6)^2}{100 \cdot 1/6} = 7,52.$$

χ^2-próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$-nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

χ^2-próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$-nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k-ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k-ra

$$\chi^2 = 7,52; \qquad f = r - 1 = 5; \qquad \alpha = 0,05; \qquad c_{\mathrm{krit}} = 11,1$$

χ^2-próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$-nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k-ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k-ra

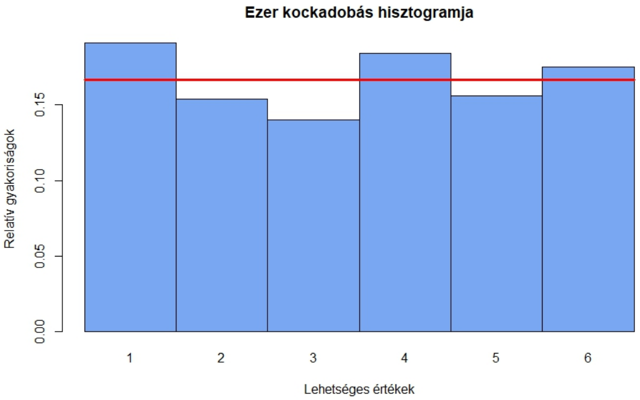
$$\chi^2 = 7,52; \qquad f = r - 1 = 5; \qquad \alpha = 0,05; \qquad c_{\mathrm{krit}} = 11,1$$

$\chi^2 = 7,52 < c_{\mathrm{krit}} = 11,1$, illetve a p-értékre $0,1847 > 0,05$.

Elfogadjuk H_0-t, elfogadható, hogy a dobókocka szabályos, nincs szignifikáns eltérés az egyenletes eloszlástól.

χ^2-próba: példa

Dobókockával dobunk ezerszer. A terjedelmet $\alpha = 0,05$-nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?



χ^2-próba: példa

Ha ezerszer dobunk, és az alábbi eredmények adódnak:

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	191	154	140	184	156	175

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k-ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k-ra

$$\chi^2 = 11,68; \qquad f = r - 1 = 5; \qquad \alpha = 0,05; \qquad c_{\mathrm{krit}} = 11,1$$

χ^2-próba: példa

Ha ezerszer dobunk, és az alábbi eredmények adódnak:

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	191	154	140	184	156	175

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k-ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k-ra

$$\chi^2 = 11,68; \qquad f = r - 1 = 5; \qquad \alpha = 0,05; \qquad c_{\mathrm{krit}} = 11,1$$

$\chi^2 = 11,68 > c_{\mathrm{krit}} = 11,1$, illetve a p-értékre $0,039 < 0,05$.

Elutasítjuk H_0-t, nem fogadható el, hogy a dobókocka szabályos, a minta alapján az eloszlás szignifikánsan eltér az egyenletes eloszlástól.