# Hipotézisvizsgálat (8. előadás)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ olyan valószínűségi változók, melyek **eloszlása nem ismert**, pontos eloszlásukat a $\vartheta \in \Theta$ paramétervektor írja le.

**Nullhipotézis (null hypothesis).** $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

**Ellenhipotézis (alternative hypothesis).** $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

A nullhipotézist **elutasítjuk**, ha a megfigyelések vektora a $B_1$ kritikus tartományba esik, azaz $\underline{X} \in B_1$ esetén; különben **elfogadjuk**.

- **Elsőfajú hibát** vétünk, ha $H_0$ igaz, és elutasítjuk.
- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance) az elsőfajú hibák valószínűségének supremuma:

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\vartheta(\underline{X} \in B_1).$$

- **Másodfajú hibát** vétünk, ha $H_0$ nem igaz, és elfogadjuk.
- A próba **erőfüggvénye** az alábbi $\beta : \Theta_1 \to [0,1]$ függvény, ami a jó döntés valószínűségét adja meg $\vartheta \in \Theta_1$ esetén:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(\underline{X} \in B_1) \qquad (\vartheta \in \Theta_1).$$

# Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz $n$ "elég nagy", például $n \geq 100$ (az átlag a centrális határeloszlás-tétel alapján közel normális eloszlású)

# Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz $n$ "elég nagy", például $n \geq 100$ (az átlag a centrális határeloszlás-tétel alapján közel normális eloszlású)

- $z$-**próba** (vagy $u$-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a** $\sigma$ **szórás ismert**

# Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz $n$ "elég nagy", például $n \geq 100$ (az átlag a centrális határeloszlás-tétel alapján közel normális eloszlású)

- ***z*-próba** (vagy $u$-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a $\sigma$ szórás ismert**
- ***t*-próba** (vagy Student-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a $\sigma$ szórás nem ismert** (csak az $s_n^*$ korrigálat tapasztalati szórás, ami az adatokból számolható)
- ***F*-próba**: **szórásra** vonatkozó hipotézis esetén

**Korrigált tapasztalati szórás** (itt $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ az átlag):

$$s_n^* = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \overline{X}^2\right)}$$

# $t$-eloszlás

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_f$ és $Y$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a

$$Z = \frac{Y}{\sqrt{(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_f^2)/f}}$$

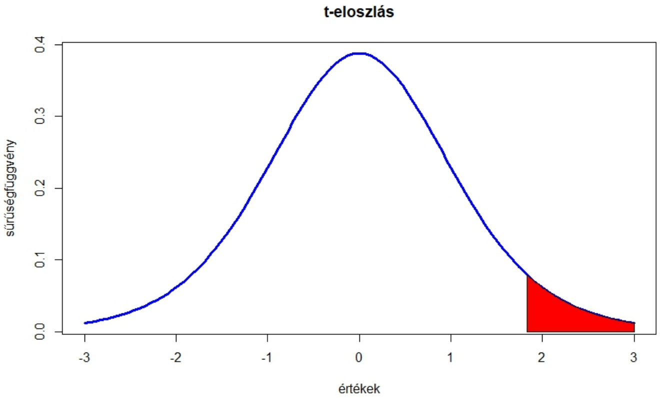
valószínűségi változó eloszlását $f$ szabadsági fokú **$t$-eloszlásnak** (vagy Student-eloszlásnak) nevezzük.

Az $f$ szabadsági fokú **$t$-eloszlás $q$-kvantilise** az a $t$ szám, melyre

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = q$$

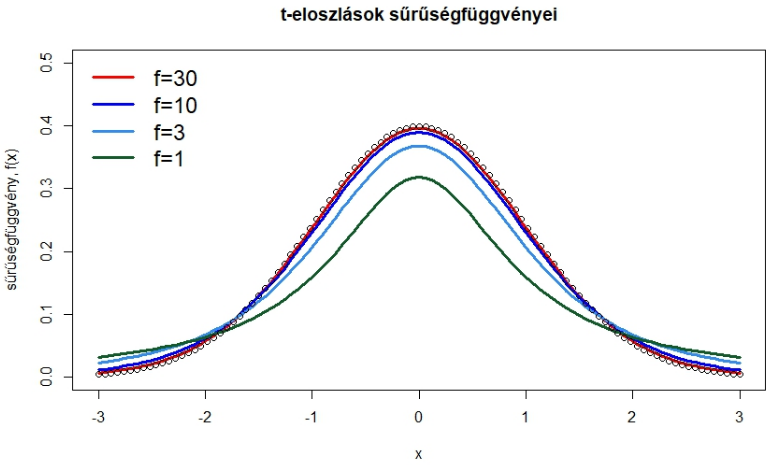
teljesül, ahol $Z$ eloszlása $f$ szabadsági fokú $t$-eloszlás.

# $t$-eloszlás kvantilise




Az $f = 9$ szabadsági fokú $t$-eloszlás $q = 0,95$-kvantilise: $\bar{t}_{9,0,05} = 1,83$.

# A $t$-eloszlás sűrűségfüggvénye




Különböző szabadsági fokú $t$-eloszlások sűrűségfüggvényei. A pöttyözött vonal a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét jelöli, ez közel van a $t$-eloszlás sűrűségfüggvényéhez, ha $f$ nagy.

# Egymintás egyoldali $t$-próba (one-sample one-sided $t$-test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén – legerősebb próba.**
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol $m, \sigma$ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika, aminek eloszlása $t$-eloszlás, ha $m = m_0$ teljesül:

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided): $H_0 : m \leq m_0$; $H_1 : m > m_0$.
- Ha $t > \bar{t}_{n-1,\alpha}$, azaz $p < \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist; ilyenkor a várható érték szignifikánsan több $m_0$-nál.
- Ha $t \leq \bar{t}_{n-1,\alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, elfogadjuk a nullhipotézist, a várható érték nem több szignifikánsan $m_0$-nál az adatok alapján.
- A kritikus érték: $\bar{t}_{n-1,\alpha}$ az $f = n - 1$ szabadsági fokú (degree of freedom) $t$-eloszlás $1 - \alpha$-kvantilise, vagyis az $f = n - 1$ szabadsági fokú egyoldali $t$-próba kritikus értéke $\alpha$ terjedelem (level of significance) mellett.

# Egymintás $t$-próba, fordított irányú ellenhipotézis

A normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismeretlen szórás esetén.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol $m, \sigma$ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika (eloszlása $t$-eloszlás $H_0$ mellett):

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis**: $H_0 : m \geq m_0$; $H_1 : m < m_0$.
- Ha $t < -\bar{t}_{n-1,\alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A kritikus érték: $-\bar{t}_{n-1,\alpha}$ az $f = n-1$ szabadsági fokú $t$-eloszlás $\alpha$-kvantilise, vagyis az a szám, melyre az alábbi teljesül:

$$\alpha = \mathbb{P}(Y \leq -\bar{t}_{n-1,\alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}} \leq -\bar{t}_{n-1,\alpha}\right),$$

ahol $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ független standard normális eloszlásúak.

$p < 0,05$: a várható érték szignifikánsan kisebb $m_0$-nál.

# Példa: egymintás egyoldali $t$-próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 351 | 370 | 352 | 340 | 362 | 363 | 366 | 355 | 374 | 347 |

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

# Példa: egymintás egyoldali $t$-próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 351 | 370 | 352 | 340 | 362 | 363 | 366 | 355 | 374 | 347 |

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \qquad \overline{X} = 358; \qquad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali $t$-próbát** alkalmazzuk: $H_0 : m \leq 50$; $H_1 : m > 50$.

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77}\sqrt{10} = 2,35.$$

Az $f = n - 1 = 9$ szabadsági fokú egyoldali $t$-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett $\overline{t}_{9;0,05} = 1,833$.

# Példa: egymintás egyoldali $t$-próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 351 | 370 | 352 | 340 | 362 | 363 | 366 | 355 | 374 | 347 |

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \qquad \overline{X} = 358; \qquad s_n^* = 10,77$$

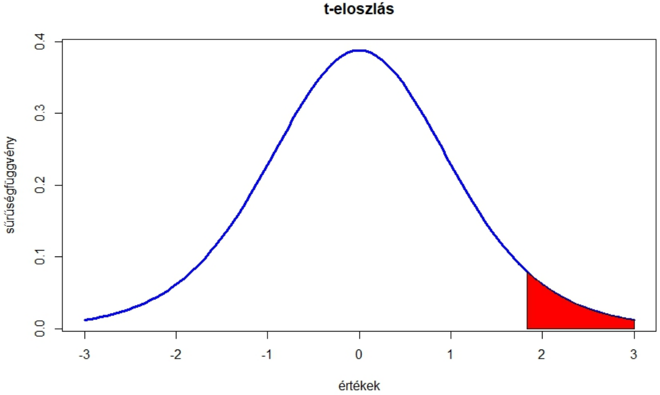
Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali *t*-próbát** alkalmazzuk: $H_0 : m \leq 50$; $H_1 : m > 50$.

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77}\sqrt{10} = 2,35.$$

Az $f = n - 1 = 9$ szabadsági fokú egyoldali $t$-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett $\bar{t}_{9;0,05} = 1,833$.

Mivel $t > \bar{t}_{9;0,05}$, **elutasítjuk a nullhipotézist**, a vízkeménység szignifikánsan meghaladja 350 mg/l határértéket. A $p$-érték: $p = 0,0217 < 0,05$.

# $t$-eloszlás egyoldali kritikus értékei




Az $f = 9$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű egyoldali $t$-próba kritikus értéke: $\overline{t}_{9,0,05} = 1,83$.

# Hipotézisvizsgálat: példa az R szoftverben

Tíz mintából mértük meg a víz keménységét.

Nullhipotézis (null hypothesis, $H_0$): $m \leq 350$

Ellenhipotézis (alternative hypothesis, $H_1$): $m > 350$

```
> viz<-c(348, 367, 349, 337, 359, 360, 363, 352, 371, 344)
```

```
> t.test(viz, mu=350, alternative="greater")
```

# Hipotézisvizsgálat: példa az R szoftverben

Tíz mintából mértük meg a víz keménységét.

Nullhipotézis (null hypothesis, $H_0$): $m \leq 350$

Ellenhipotézis (alternative hypothesis, $H_1$): $m > 350$

**> viz<-c(348, 367, 349, 337, 359, 360, 363, 352, 371, 344)**

**> t.test(viz, mu=350, alternative="greater")**

```
One Sample t-test

data:  viz

t = 2.3489, df = 9, p-value = 0.02169

alternative hypothesis:  true mean is greater than 350

95 percent confidence interval:  351.7566 Inf

mean of x :  358
```

Most $p = 0.02169 < 0,05 = \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist.

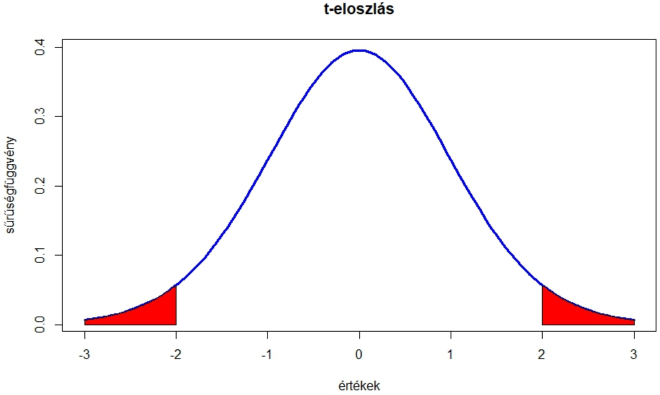
# Egymintás kétoldali $t$-próba (one-sample two-sided $t$-test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén.** Nem legerősebb (nincs ilyen).
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol $m, \sigma$ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika (eloszlása $t$-eloszlás/Student-eloszlás $H_0$ mellett):

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided): $H_0 : m = m_0$; $\qquad H_1 : m \neq m_0$.
- Ha $|t| > t_{n-1,\alpha}$, azaz $p < \alpha$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, a várható érték szignifikánsan eltér $m_0$-tól.
- Ha $|t| \leq t_{n-1,\alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, akkor elfogadjuk $H_0$-t, a várható érték nem tér el szignifikánsan $m_0$-tól.
- A kritikus érték: $t_{n-1,\alpha}$ az $f = n-1$ szabadsági fokú (degree of freedom) $t$-eloszlás $1-\alpha/2$-kvantilise, vagyis az $f = n-1$ szabadsági fokú (degree of freedom) kétoldali $t$-próba kritikus értéke $\alpha$ terjedelem (level of significance) mellett.

# Kétoldali $t$-próba kritikus értékei




Az $f = 29$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali $t$-próba kritikus értéke: $t_{29;0,05} = 2,04$.

# Példa: Egymintás kétoldali $t$-próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tabletta hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga $9,8$, korrigált tapasztalati szórása $0,62$ lett. A szignifikanciaszintet $\alpha = 0,05$-nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

# Példa: Egymintás kétoldali $t$-próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tabletta hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga 9, 8, korrigált tapasztalati szórása 0, 62 lett. A szignifikanciaszintet $\alpha = 0,05$-nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

$$n = 30; \qquad \overline{X} = 9,8; \qquad s_n^* = 0,62$$

**Egymintás kétoldali $t$-próbát** végezhetünk, normális eloszlást feltételezve.

$$H_0 : m = 10; \qquad H_1 : m \neq 10; \qquad \alpha = 0,05; \qquad f = n - 1 = 29.$$

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{9,8 - 10}{0,62} \cdot \sqrt{30} = -1,77.$$

A kritikus érték: $t_{29,0,05} = 2,045 \Rightarrow |t| = 1,77 \leq 2,045$, nincs szignifikáns eltérés.
$p$-érték: $p = 0,0867 \geq 0,05$.