Statisztika: bevezetés (7. előadás)

Célok:

- ismeretlen paraméterek becslése az adatok alapján (például egy kőzet valódi vastartalma)
- hipotézisek ellenőrzése az adatok alapján (például: független-e a egy kőzetben a vas és a réz mennyisége)
- előrejelzés az adatok alapján (például: mennyi lesz a Föld átlagos hőmérséklete 2020-ban)

Statisztika: bevezetés (7. előadás)

Célok:

- ismeretlen paraméterek becslése az adatok alapján (például egy kőzet valódi vastartalma)
- hipotézisek ellenőrzése az adatok alapján (például: független-e a egy kőzetben a vas és a réz mennyisége)
- előrejelzés az adatok alapján (például: mennyi lesz a Föld átlagos hőmérséklete 2020-ban)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ olyan valószínűségi változók, melyek **eloszlása nem ismert**, vagy nem pontosan ismert. Például feltesszük, hogy normális eloszlásúak, de sem a várható értéküket, sem a szórásukat nem ismerjük: m, σ **ismeretlenek**.

Az adatok alapján minél jobb becsléseket kereshetünk m-re és σ-ra, vagy vizsgálhatunk olyan hipotéziseket, mint például $m \geq 60$. Például: igaz-e, hogy egy területen a kőzetek vastartalma legalább 60%.

Hipotézisvizsgálat

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ olyan valószínűségi változók, melyek **eloszlása nem ismert**, pontos eloszlásukat a $\vartheta \in \Theta$ paramétervektor írja le.

Nullhipotézis (null hypothesis). $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis (alternative hypothesis). $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

A nullhipotézist **elutasítjuk**, ha a megfigyelések vektora a B_1 kritikus tartományba esik, azaz $\underline{X} \in B_1$ esetén; különben **elfogadjuk**.

- **Elsőfajú hibát** vétünk, ha H_0 igaz, és elutasítjuk.
- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance) az elsőfajú hibák valószínűségének supremuma:

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\vartheta(\underline{X} \in B_1).$$

- **Másodfajú hibát** vétünk, ha H_0 nem igaz, és elfogadjuk.
- A próba **erőfüggvénye** az alábbi $\beta : \Theta_1 \to [0,1]$ függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(\underline{X} \in B_1) \qquad (\vartheta \in \Theta_1).$$

Egymintás egyoldali z-próba (one-sample one-sided z test)

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Torzítatlan, konzisztens, **legerősebb próba** egyoldali esetben (a Neyman–Pearson-lemma alapján bizonyítható).

- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m ismeretlen paraméter, $\sigma > 0$ ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális H_0 mellett, ezt beláttuk):

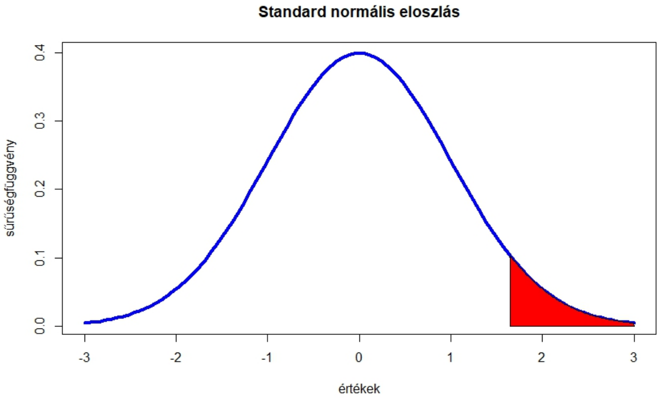
$$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided): $H_0 : m \leq m_0$; $H_1 : m > m_0$.
- Ha $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A p-érték ilyenkor $1 - \Phi(z)$.

$p < 0,05$: a várható érték szignifikánsan több m_0-nál.

$p \geq 0,05$: a várható érték nem több szignifikánsan m_0-nál.

Az egyoldali z-próba kritikus értéke



Az $\alpha = 0,05$ terjedelmű egyoldali z-próba kritikus értéke:
$\Phi^{-1}(1-\alpha) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$.

Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága $177,6$ cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?

Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága $177,6$ cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?
- $H_0 : m \leq 177,6$; $\quad H_1 : m > 177,6.$
- $$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{181,7 - 177,6}{8,5}\sqrt{90} = 4,57.$$
- $\alpha = 0,05$ terjedelem mellett $\Phi^{-1}(1-\alpha) = 1,645$, így $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$.
  p-érték: $1 - \Phi(4,57) < 0,0001 < 0,05$.
- Elutasítjuk a nullhipotézist. Az adatok alapján a holland férfiak testmagasságának várható értéke szignifikánsan több 177,6 cm-nél, vagyis az európai átlagnál.

Egymintás kétoldali z-próba

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Nem legerősebb (nincs legerősebb próba ebben a feladatban).

- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m ismeretlen paraméter, $\sigma > 0$ ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális H_0 mellett):

$$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

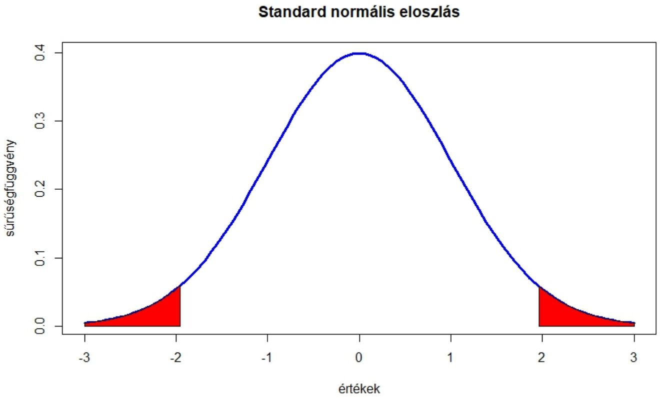
- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided): $H_0 : m = m_0$; $H_1 : m \neq m_0$.
- Ha $|z| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A p-érték ilyenkor $2 - 2\Phi(|z|)$.

Φ a standard normális eloszlásfüggvény: $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.

$p < 0,05$: a várható érték szignifikánsan eltér m_0-tól.

$p \geq 0,05$: nincs szignifikáns eltérés m_0-tól.

A kétoldali z-próba kritikus értéke



Az $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali z-próba kritikus értéke:
$\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96.$

Példa: egymintás z-próba

Egy gyárban a minőségellenőrzésnél azt feltételezik, hogy egy bizonyos típusú kalapács fejének a tömegét mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és $\sigma = 3$ gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti eljárással megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?

Példa: egymintás z-próba

Egy gyárban a minőségellenőrzésnél azt feltételezik, hogy egy bizonyos típusú kalapács fejének a tömegét mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és $\sigma = 3$ gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti eljárással megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?
- $H_0 : m = 364$; $H_1 : m \neq 364$.
- $$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{367,2 - 364}{3}\sqrt{20} = 4,77.$$
- $\alpha = 0,05$ terjedelem mellett $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = 1,96$. $p = 1,84 \cdot 10^{-6} < 0,05$.
- $|z| < \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, elutasítjuk a nullhipotézist. A kalapácsok fejének tömegének várható értéke a minta alapján szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól.