

## Események függetlensége (4. előadás)

Az  $A, B \in \mathcal{A}$  események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

## Események függetlensége (4. előadás)

Az  $A, B \in \mathcal{A}$  események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

Több eseménynél tetszőleges részhalmazra teljesülnie kell ennek a tulajdonságnak.

Az  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  események **függetlenek**, ha tetszőleges  $k \geq 1$  és  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  számokra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

## Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.

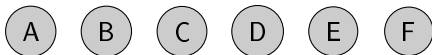
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül** mindannyian  **$p = 0,03$**  valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon **pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

# Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.  
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül**  
mindannyian  $p = 0,03$  valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon  
**pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**



néhány jó lehetőség és a valószínűsége:

0,03	0,03	0,97	0,97	0,97	0,97
0,03	0,97	0,03	0,97	0,97	0,97
0,03	0,97	0,97	0,03	0,97	0,97

...

0,97	0,03	0,03	0,97	0,97	0,97
------	------	------	------	------	------

...

0,97	0,97	0,97	0,97	0,03	0,03
------	------	------	------	------	------

$$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$$

$$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$$

$$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$$

$$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$$

$$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$$

szorzás

## Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.  
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül**  
mindannyian  **$p = 0,03$**  valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon  
**pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0,97 & 0,03 & 0,03 & 0,97 & 0,97 & 0,97 \\ \hline \end{array} \rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$$

a jó lehetőségek száma, azaz  
hányféleképpen választhatjuk ki a két hiányzót:

egy jó lehetőség valószínűsége:

tehát a valószínűség:

## Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.  
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül**  
mindannyian  $p = 0,03$  valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon  
**pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

$$\boxed{0,97} \boxed{0,03} \boxed{0,03} \boxed{0,97} \boxed{0,97} \boxed{0,97} \rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$$

a jó lehetőségek száma, azaz  
hányféleképpen választhatjuk ki a két hiányzót:  $\binom{6}{2}$

egy jó lehetőség valószínűsége:  $0,03^2 \cdot 0,97^4$

tehát a valószínűség:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két hiányzó}) = \binom{6}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^4 = 1,2\%.$$

# Binomiális eloszlás

- $n$  független kísérletet végzünk;
- mindegyik  $p$  valószínűséggel sikerül;
- $X$  a sikeres kísérletek száma.

Például:

- Visszatevéses mintavétel,  $n$  húzás,  $p$  a fekete golyók aránya.
- Egy felmérésben  $n = 1500$  embert kérdezőnk meg, egy adott kérdésre mindenki egymástól függetlenül  $p = 0,8$  valószínűséggel válaszol. A válaszok száma binomiális eloszlású.
- Egy biztosító  $n = 60000$  ügyfelének mindegyike egymástól függetlenül  $p = 0,0001$  valószínűséggel okoz balesetet egy adott évben. A balesetet okozó ügyfelek száma binomiális eloszlású.
- Tegyük fel, hogy a nyár  $n = 92$  napjának mindegyikén egymástól függetlenül  $p = 0,02$  valószínűséggel lesz jégeső egy adott helyen. A nyári jégesős napok száma binomiális eloszlású.

# Binomiális eloszlás

- **n független** kísérletet végzünk;
- mindegyik **p valószínűséggel** sikerül;
- $X$  a sikeres kísérletek száma.

Mennyi a valószínűsége, hogy **pontosan  $k$  kísérlet sikerül**, azaz  $X = k$ ? Ahogyan a korábbi példában láttuk:

- A jó lehetőségek száma, azaz hányféleképpen választhatjuk ki, hogy melyik  $k$  kísérlet sikeres:  $\binom{n}{k}$ .
- Egy jó lehetőség valószínűsége:  $p^k(1 - p)^{n-k}$ , hiszen a kísérletek függetlenek, ezért az együttes bekövetkezés (metszet) valószínűsége a valószínűségek szorzata, és  $k$  kísérlet sikerül, a többi  $n - k$  nem.
- Mivel minden jó lehetőség ugyanolyan valószínű, az  $X = k$  valószínűsége a lehetőségek számának és egy lehetőség valószínűségének szorzata:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

## Binomiális eloszlás: definíció

- $n$  független kísérletet végzünk;
- mindegyik  $p$  valószínűséggel sikerül;
- $X$  a sikeres kísérletek száma.

Az  $X$  valószínűségi változó **binomiális eloszlású**  $n$  renddel és  $p$  paraméterrel, ha lehetséges értékei:

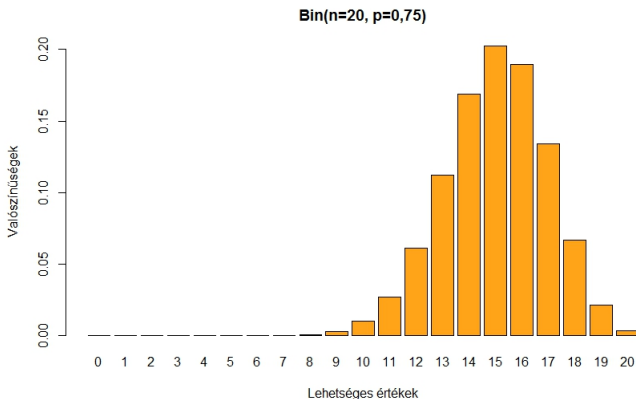
$$0, 1, 2, \dots, n,$$

és minden  $0 \leq k \leq n$  egészre

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

( $n \geq 1$  egész,  $0 < p < 1$ .) Jelölés:  $\text{Bin}(n, p)$ .

## Példa: binomiális eloszlás



Binomiális eloszlás,  $n = 20$ ,  $p = 0,75$ . Vízszintes tengely: lehetséges értékek, azaz  $k = 0, 1, \dots, 20$ , oszlopok magassága: a  $\mathbb{P}(X = k)$  valószínűségek.

## Példa: binomiális eloszlás

Egy felmérésben  $n = 1500$  embert kérdezzük meg. Egy adott kérdésre minden résztvevő **egymástól függetlenül**  $p = 0,8$  valószínűséggel válaszol. Jelölje  $X$ , hogy hányan válaszoltak erre a kérdésre. Ekkor

- $X$  **binomiális eloszlású**  $n = 1500$  renddel és  $p = 0,8$  paraméterrel.
- Tetszőleges  $0 \leq k \leq 1500$  esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(k \text{ válasz}) &= \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \binom{1500}{k} 0,8^k \cdot 0,2^{1500-k}.\end{aligned}$$

- Például annak valószínűsége, hogy pontosan  $k = 1200$ -an válaszolnak a kérdésre:

$$\mathbb{P}(1200 \text{ válasz}) = \mathbb{P}(X = 1200) = \binom{1500}{1200} 0,8^{1200} \cdot 0,2^{300} = 2,57\%.$$

# A binomiális eloszlás várható értéke és szórása

Ha az  $X$  valószínűségi változó **binomiális eloszlású**  $n$  renddel és  $p$  paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

akkor  $X$  **várható értéke**, illetve **szórása**:

$$\mathbb{E}(X) = np; \quad D(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$

## Példa: binomiális eloszlás

Egy felmérésben  $n = 1500$  embert kérdezőnk meg. Egy adott kérdésre minden résztvevő **egymástól függetlenül**  $p = 0,8$  valószínűséggel válaszol. Jelölje  $X$ , hogy hányan válaszoltak erre a kérdésre. Ekkor

- A válaszadók számának **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = np = 1500 \cdot 0,8 = \mathbf{1200}.$$

- A válaszadó számának **szórása**:

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1500 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = \mathbf{15,5}.$$

## A binomiális eloszlás közelítése

Tegyük fel, hogy egy biztosító  $n = 100000$  ügyfelének mindegyike egy év alatt egymástól függetlenül  $p = 0,0001$  valószínűséggel okoz balesetet. A balesetet okozó ügyfelek számának (ezt jelöljük  $X$ -szel) **várható értéke**:

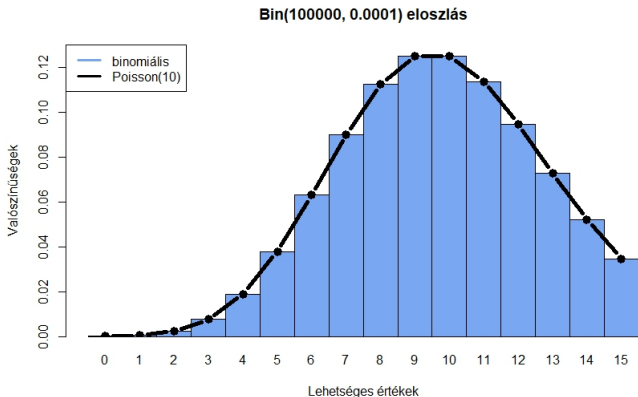
$$\mathbb{E}(X) = np = 100000 \cdot 0,0001 = \mathbf{10}.$$

Annak valószínűsége, hogy **pontosan  $k$  ügyfél okoz balesetet**:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \binom{100000}{k} \cdot 0,0001^k \cdot 0,9999^{100000-k} = \\ &= \frac{100000 \cdot 99999 \cdot \dots \cdot (100001 - k)}{k!} \cdot 0,0001^k \cdot 0,9999^{100000-k} \approx \\ &\approx \frac{100000^k \cdot 0,0001^k}{k!} \left(1 - \frac{10}{100000}\right)^{100000} \approx \frac{10^k}{k!} e^{-10},\end{aligned}$$

felhasználva, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$  tetszőleges  $x > 0$ -ra.

# A binomiális eloszlás közelítése



Binomiális eloszlás  $n = 100000$  renddel és  $p = 0,0001$  paraméterrel (vízszintes tengely:  $k$ , oszlopok magassága:  $\mathbb{P}(X = k)$ ).

Feketével a  $\frac{10^k}{k!} e^{-10}$  függvény (ez lesz a Poisson(10)-eloszlás).

## Poisson-eloszlás: definíció

- ha  $n$  független kísérletből mindegyik  $p$  valószínűséggel sikeres, ahol  $n$  „nagy” és  $p$  „kicsi”:  $\lambda = np$  a sikeres kísérletek számának várható értéke;
- annak valószínűsége, hogy pontosan  $k$  kísérlet sikeres,  $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ -val közelíthető (a számolás és az ábra alapján);
- ez a gyakran használt Poisson-eloszlás **ritkán bekövetkező események számának** modellezésére;
- ha a két esemény (például földrengés) között eltelt idők független, exponenciális eloszlásúak, akkor az adott idő alatt bekövetkező események száma Poisson-eloszlású.

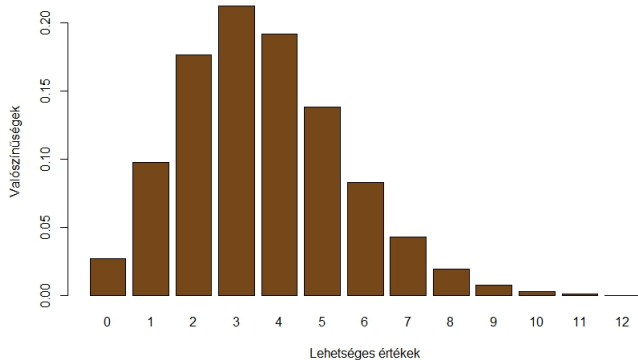
Legyen  $\lambda > 0$ . Az  $X$  valószínűségi változó  $\lambda$  **paraméterű Poisson-eloszlású**, ha lehetséges értékei:

$$k = 0, 1, 2, \dots, \text{ és ekkor } \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

A  $\lambda$  paraméterű Poisson-eloszlás **várható értéke** és **szórása**:

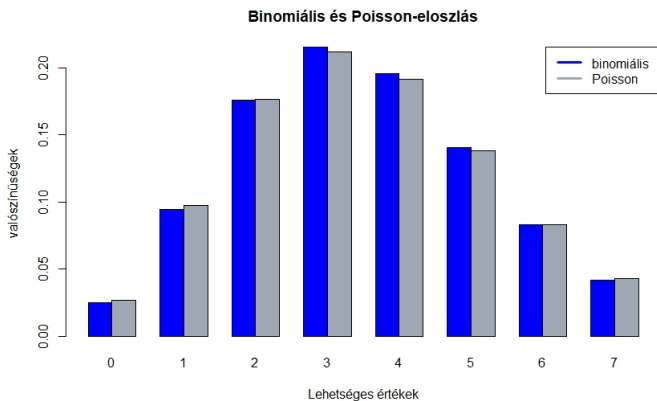
$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \quad \mathbb{D}(X) = \sqrt{\lambda}.$$

## Példa: Poisson-eloszlás



Poisson-eloszlás,  $\lambda = 3,61$ ,  $k = 12$ -ig

# A Poisson-eloszlás és binomiális eloszlás kapcsolata



A binomiális eloszlás  $n = 92$  renddel és  $p = 0,0392$  paraméterrel, illetve a Poisson-eloszlás  $\lambda = np = 3,61$  paraméterrel

## Poisson-eloszlás: példa

Az  $X$  valószínűségi változó  $\lambda$  **paraméterű Poisson-eloszlású**, ha lehetséges értékei:

$$k = 0, 1, 2, \dots, \text{ és ekkor } \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

A  $\lambda$  paraméterű Poisson-eloszlás **várható értéke** és **szórása**:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \quad \mathbb{D}(X) = \sqrt{\lambda}.$$

**Példa.** Tegyük fel, hogy egy városban az egy nap alatt bekövetkező autóbalesetek száma Poisson-eloszlású, és **várható értéke 3,61**. Ekkor az egy nap alatt bekövetkező autóbalesetek számának **szórása**:

$$D(X) = \sqrt{3,61} = \mathbf{1,9}.$$

Annak valószínűsége, hogy pontosan 5 baleset lesz:

$$\mathbb{P}(X = 5) = \frac{3,61^5}{5!} e^{-5} = \mathbf{14\%}.$$