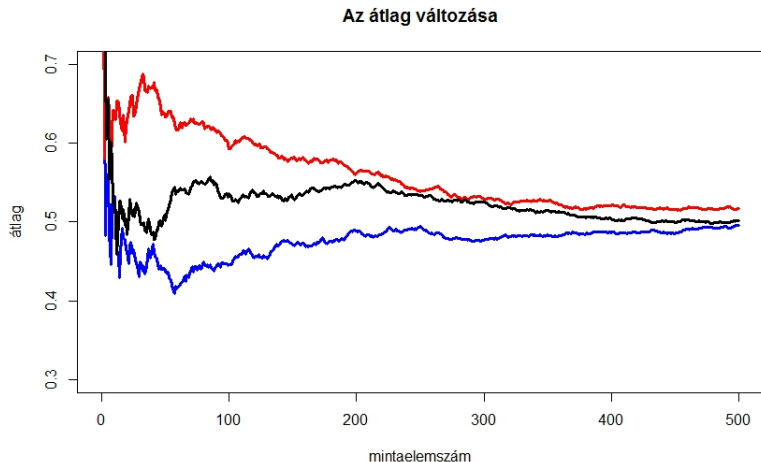
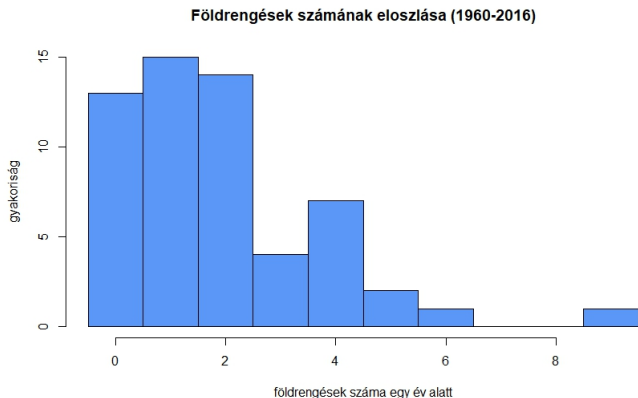


## Az átlag konvergenciája (3. előadás)



Az átlagok sorozata:  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta átlagainak sorozata  $n = 500$ -ig; itt a **várható érték 0,5**  $\rightarrow$  az átlagok ehhez esnek egyre közelebb

# Várható érték és szórás



A legalább 6-os erősségű földrengések évenkénti számának eloszlása Új-Zélandon 1960 és 2016 között (*adatok forrása: New Zealand geonet project*). Ez alapján **évente mennyi, legalább 6-os földrengés várható** Új-Zélandon? Mennyi a **szórás**?

## Becslés az adatokból

A megfigyelt adataink legyenek

$$x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 1, \dots, x_{54} = 4, x_{55} = 6, x_{56} = 1, x_{57} = 9.$$

A **várható érték** szokásos becslése az **átlag**:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{57}}{57} = \frac{\sum_{j=1}^{57} x_j}{57} = \frac{3 + 3 + 0 + \dots + 9}{57} = 1,99.$$

A **szórás** egy szokásos becslése a **korrigált tapasztalati szórás**. Tekintsük az átlagtól való eltéréseket:  $(x_j - \bar{x})$ , majd ezeknek az  $n - 1$ -gyel súlyozott négyzetes közepét:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}} = \\ &= \sqrt{\frac{1,01^2 + 1,01^2 + 1,99^2 + \dots + 7,01^2}{56}} = 1,8.\end{aligned}$$

## Várható érték becslése az adatokból

A teljes adatsorból számolva az átlagot, csoportosíthatunk a megfigyelt értékek szerint:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{57}}{57} = \frac{\sum_{j=1}^{57} x_j}{57} = \frac{3 + 3 + 0 + \dots + 9}{57} = \\ &= \frac{0 \cdot 13 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 14 + \dots + 9 \cdot 1}{57} = \\ &= 0 \cdot \frac{13}{57} + 1 \cdot \frac{15}{57} + 2 \cdot \frac{14}{57} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{57} + 9 \cdot \frac{1}{57} = \\ &= 0 \cdot 0,23 + 1 \cdot 0,26 + 2 \cdot 0,25 + \dots + 6 \cdot 0,02 + 9 \cdot 0,02 = \\ &= 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + \dots + 9 \cdot \mathbb{P}(X = 9) = \\ &= \sum_{k=0}^9 k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^9 k \cdot p_k = 1,99,\end{aligned}$$

ha az  $X$  valószínűségi változó földrengések száma egy év alatt, és a  $\mathbb{P}(X = k) = p_k$  az olyan évek aránya, amikor pontosan  $k$  földrengés volt (az előző táblázat alapján).

## Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Legyen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  olyan **diszkrét** valószínűségi változó, melynek

- lehetséges értékei:  $\{x_1, x_2, \dots\}$
- az ehhez tartozó valószínűségek:  $p_1 = \mathbb{P}(X = x_1), p_2 = \mathbb{P}(X = x_2), \dots$
- azaz  $X$  eloszlása:  $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$

Ekkor az  $X$  **diszkrét** valószínűségi változó **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbb{P}(X = x_k), \quad \text{ha} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty.$$

Például ha  $X$  csak nemnegatív egész értékeket vehet fel (mint a földrengések száma):

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + \dots$$

## Valószínűségi változó: példa

Valakinek három gyereke születik. Legyen  $X$  a fiúk száma. Ekkor az összes lehetőség halmaza:

$$\Omega = \{FFF, FFL, FLF, FLL, LFF, LFL, LLF, LLL\};$$

A fiúk számát hozzárendelve az egyes lehetőségekhez kapunk egy valószínűségi változót:

$$\begin{aligned} X(LLL) &= 0; & X(LLF) &= X(LFL) = X(FLL) = 1; \\ X(FFL) &= X(FLF) = X(LFF) = 2; & X(FFF) &= 3. \end{aligned}$$

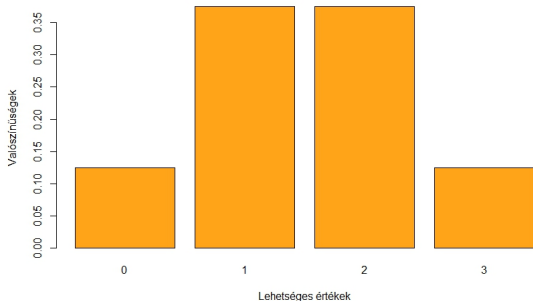
Az  $X$  valószínűségi változó lehetséges értékei:

$$\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \text{véges halmaz}$$

A lehetséges értékekhez tartozó valószínűségek, feltéve, hogy a gyerekek egymástól függetlenül  $1/2$  valószínűséggel fiúk, azaz mind a 8 eset egyformán valószínű:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= 1/8, & \mathbb{P}(X = 1) &= 3/8, \\ \mathbb{P}(X = 2) &= 3/8, & \mathbb{P}(X = 3) &= 1/8. \end{aligned}$$

## Példa: a fiúk számának eloszlása



A fiúk számának eloszlása: a lehetséges értékek:

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

és a hozzájuk tartozó valószínűségek:

$$1/8, \quad 3/8, \quad 3/8, \quad 1/8.$$

## Diszkrét valószínűségi változó várható értéke: példa

**Három gyerek.** Legyen  $X$  a fiúk száma a három gyerek közül, feltéve, hogy a gyerekek egymástól függetlenül  $1/2$  valószínűséggel fiúk. Ekkor

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8},$$

és **a fiúk számának várható értéke:**

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = \mathbf{1,5}.$$

**Szabályos kockadobás.** Legyen  $Y$  egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor **a dobott szám várható értéke:**

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = \mathbf{3,5}.$$

## A várható érték tulajdonságai

- **Összeg várható értéke.** Ha  $X, Y$  valószínűségi változók, és  $X, Y, X + Y$  várható értéke létezik, akkor

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

- **Konstans kiemelése.** Ha az  $X$  valószínűségi változó várható értéke létezik, és  $c$  tetszőleges valós szám, akkor

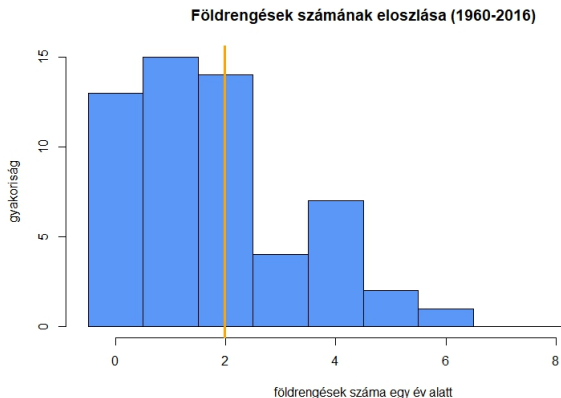
$$\mathbb{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathbb{E}(X).$$

- **Függvény várható értéke** Egy  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) \mathbb{P}(X = x_k) \quad (\text{ha létezik}),$$

ahol az  $X$  lehetséges értékei  $\{x_1, x_2, \dots\}$ .

# Várható érték és szórás



A legalább 6-os erősségű földrengések évenkénti számának eloszlása Új-Zélandon 1960 és 2016 között, és a **várható érték**:  $\mathbb{E}(X) = 1,99$ . Mennyi lehet a **szórás**, vagyis a várható értéktől való „átlagos négyzetes eltérés”? (adatok forrása: *New Zealand geonet project*)

## Valószínűségi változó szórása

Legyen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó, melyre  $\mathbb{E}(X^2)$  létezik. Ekkor  $X$  **szórásnégyzete**:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right).$$

Legyen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó, melyre  $\mathbb{E}(X^2)$  létezik. Ekkor  $X$  **szórása**:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)}.$$

## A szórásnégyzet kiszámítása

Legyen  $X$  olyan **diszkrét valószínűségi változó**, melyre  $\mathbb{E}(X^2)$  létezik. Legyenek az  $X$  lehetséges értékei  $x_1, x_2, \dots$ , a hozzájuk tartozó valószínűségek:  $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ . Ekkor

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \cdot p_k \right] - \left[ \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k \right]^2 = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \cdot \mathbb{P}(X = k) \right] - \left[ \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbb{P}(X = k) \right]^2. \end{aligned}$$

Ha  $X$  csak **nemnegatív egész értékeket** vehet fel:

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}(X = k) - \left[ \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) \right]^2.$$

## A földrengések számának szórása

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_k$	0,23	0,26	0,25	0,06	0,12	0,04	0,02	0	0	0,02

Ekkor  $X$  **várható értéke**, ahol  $X$  a legalább 6-os földrengések száma egy év alatt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^9 k \cdot p_k = 0 \cdot 0,23 + 1 \cdot 0,26 + 2 \cdot 0,25 + \dots + 9 \cdot 0,02 = \mathbf{1,99}.$$

Az  $X^2$  valószínűségi változó várható értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^9 k^2 \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^9 k^2 \cdot p_k = \\ &= 0^2 \cdot 0,23 + 1^2 \cdot 0,26 + 2^2 \cdot 0,25 + \dots + 9^2 \cdot 0,02 = 6,77.\end{aligned}$$

Ebből  $X$  **szórása**:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \sqrt{6,77 - 1,99^2} = \mathbf{1,8}.$$

## A fiúk számának szórása

Legyen  $X$  a fiúk száma a három gyerek közül, feltéve, hogy a gyerekek egymástól függetlenül  $1/2$  valószínűséggel fiúk. Ekkor

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Az  $X^2$  valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^3 k^2 \cdot \mathbb{P}(X = k) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3.$$

Már láttuk, hogy  $\mathbb{E}(X) = 1,5$ . Ezért  $X$  **szórásnégyzete**:

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 3 - 1,5^2 = 3 - 2,25 = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Végül a fiúk számának **szórása**:

$$D(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866.$$

## A kockadobás szórása

Legyen  $X$  egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2 + \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{1}{6} \cdot 6^2 = \frac{91}{6}.$$

Másrészt a dobott szám **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{7}{2}.$$

Ebből

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 2,92.$$

A kockadobás szórása:  $D(X) = \sqrt{2,92} = 1,71$ .

Általában  $n$  oldalú dobókocka esetén:  $D(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ .

# A szórásnégyzet tulajdonságai

- **Nemnegativitás.**  $D^2(X) \geq 0$  és  $D(X) \geq 0$  mindig teljesül.
- **Szorzás és eltolás.** Ha  $a, b$  valós számok,  $X$  véges szórású valószínűségi változó, akkor

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X) \quad \Rightarrow \quad D(aX + b) = |a|D(X).$$

- Van olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke véges, de a szórása nem létezik. Például:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{0,83}{k^3} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

# Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  minden  $x$ -re. Helyette:

**diszkrét**

$X$  lehetséges értékei:  $x_1, x_2, \dots$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

**abszolút folytonos**

$X$  sűrűségfüggvénye:  $f$ .

# Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  minden  $x$ -re. Helyette:

**diszkrét**

$X$  lehetséges értékei:  $x_1, x_2, \dots$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

**abszolút folytonos**

$X$  sűrűségfüggvénye:  $f$ .

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

# Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  minden  $x$ -re. Helyette:

**diszkrét**

$X$  lehetséges értékei:  $x_1, x_2, \dots$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

**abszolút folytonos**

$X$  sűrűségfüggvénye:  $f$ .

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

# Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  minden  $x$ -re. Helyette:

**diszkrét**

$X$  lehetséges értékei:  $x_1, x_2, \dots$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^k \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

**abszolút folytonos**

$X$  sűrűségfüggvénye:  $f$ .

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

## Várható érték és szórás abszolút folytonos esetben

Legyen  $X$  abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye  $f$ .  
Ekkor  $X$  **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx,$$

ha ez az integrál létezik és véges.

Tegyük fel, hogy az  $X$  valószínűségi változó abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye  $f$ , és  $\mathbb{E}(X^2)$  létezik, azaz az  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$  integrál véges. Ekkor  $X$  **szórásnégyzete**:

$$D^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

**szórása** pedig

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}.$$

*A szórás definíciója megegyezik a diszkrét esetben használttal.*

## Nevezetes eloszlások várható értéke és szórása

- $X$  normális eloszlású  $m$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással:

$$\mathbb{E}(X) = m; \quad D(X) = \sigma$$

a definícióból adódik.

- $X$  exponenciális eloszlású  $\lambda$  paraméterrel:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0); \quad \mathbb{E}(X) = D(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

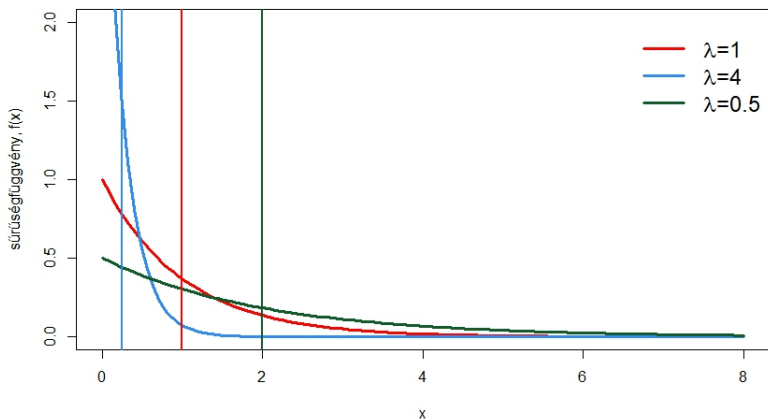
- $X$  egyenletes eloszlású az  $[a, b]$  intervallumon:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}(a < x < b); \quad E(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Itt  $f$  az eloszlások sűrűségfüggvénye,  $\mathbb{I}$  pedig indikátor, értéke 1, ha igaz a benne szereplő kifejezés, 0 különben.

# Exponenciális eloszlás

Exponenciális eloszlások sűrűségfüggvényei



Különböző paraméterű ( $\lambda = \frac{1}{2}, 1$ , illetve 4) exponenciális eloszlások sűrűségfüggvényei és a várható értékeik:  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 2, 1$  illetve  $\frac{1}{4}$

## Momentumok

Az  $X$  valószínűségi változók  **$k$ . momentuma** a  $k$ . hatványának várható értéke:

$$\mathbb{E}(X^k).$$

Általában igaz, hogy ha  $X$  abszolút folytonos valószínűségi változó,  $f$  a sűrűségfüggvénye, és  $\mathbb{E}(g(X))$  létezik, akkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx.$$

Ezért a  $k$ . momentum kiszámítása:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Következmény: a **szórásnégyzetet** a következőképpen számíthatjuk ki abszolút folytonos  $X$  valószínűségi változó esetén:

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \right]^2.$$

# Események függetlensége

Az  $A, B \in \mathcal{A}$  események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

# Események függetlensége

Az  $A, B \in \mathcal{A}$  események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

Több eseménynél tetszőleges részhalmazra teljesülnie kell ennek a tulajdonságnak.

Az  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  események **függetlenek**, ha tetszőleges  $k \geq 1$  és  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  számokra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

## Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.

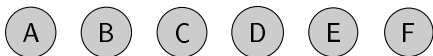
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül** mindannyian  **$p = 0,03$**  valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon **pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

# Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.  
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül**  
mindannyian  **$p = 0,03$**  valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon  
**pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**



néhány jó lehetőség és a valószínűsége:

0,03	0,03	0,97	0,97	0,97	0,97	$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$
0,03	0,97	0,03	0,97	0,97	0,97	$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$
0,03	0,97	0,97	0,03	0,97	0,97	$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$
...						
0,97	0,03	0,03	0,97	0,97	0,97	$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$
...						
0,97	0,97	0,97	0,97	0,03	0,03	$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$

szorzás

## Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.  
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül**  
mindannyian  **$p = 0,03$**  valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon  
**pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0,97 & 0,03 & 0,03 & 0,97 & 0,97 & 0,97 \\ \hline \end{array} \rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$$

a jó lehetőségek száma, azaz  
hányféleképpen választhatjuk ki a két hiányzót:

egy jó lehetőség valószínűsége:

tehát a valószínűség:

## Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.  
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül**  
mindannyian  $p = 0,03$  valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon  
**pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

$$\boxed{0,97} \boxed{0,03} \boxed{0,03} \boxed{0,97} \boxed{0,97} \boxed{0,97} \rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$$

a jó lehetőségek száma, azaz  
hányféleképpen választhatjuk ki a két hiányzót:  $\binom{6}{2}$

egy jó lehetőség valószínűsége:  $0,03^2 \cdot 0,97^4$

tehát a valószínűség:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két hiányzó}) = \binom{6}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^4 = 1,2\%.$$