

Valószínűségszámítás és statisztika

Földtudomány BSc
csillagász, geofizikus, meteorológus szakirány
Backhausz Ágnes
agnes.backhausz@ttk.elte.hu

2019/2020. őszi félév

Tudnivalók

Tematika, segédanyagok, gyakorló tesztek: moodle.elte.hu

Megajánlott jegyet lehet szerezni:

- három húszperces zh megírásával (október 1., november 5., december 3-i előadások első felében)
- vagy egyetlen zh megírásával (december 13-án)

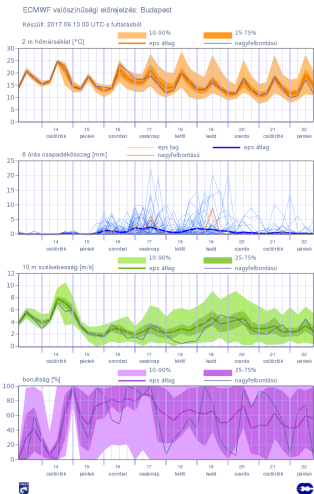
Aki nem kap megajánlott jegyet vagy azt nem fogadja el, a vizsgaidőszakban tehet írásbeli vizsgát.

Ponthatárok százalékban kifejezve: 40, 53, 66, 79.

Fogadóóra: szerda 12-13, csütörtök 12-13, D 3-415.

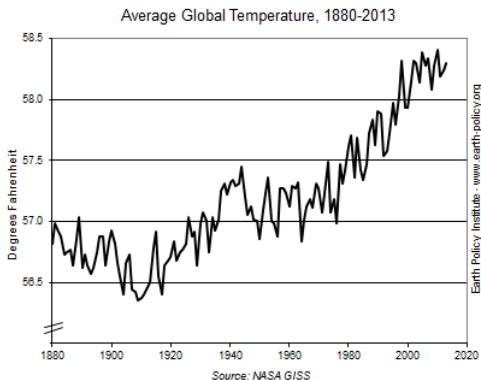
agnes.backhausz@ttk.elte.hu

Fáklyadiagram



Forrás: Országos Meteorológiai Szolgálat (www.met.hu)

A Föld hőmérséklete



A Föld átlagos éves középhőmérséklete 1880-2013 között (forrás: NASA GISS, $57^{\circ}F = 13,9^{\circ}C$)

Valószínűségszámítás és statisztika

A **véletlenség** forrása lehet:

- jövőbeli esemény, ami nem determinisztikusan kiszámítható
- mérési eljárás hibája
- információ hiánya

Valószínűségszámítás és statisztika

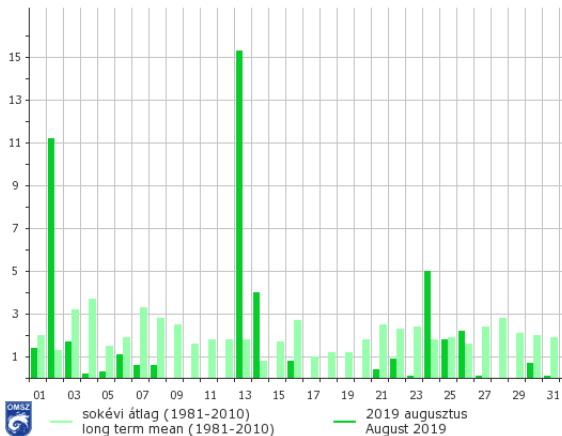
A **véletlenség** forrása lehet:

- jövőbeli esemény, ami nem determinisztikusan kiszámítható
- mérési eljárás hibája
- információ hiánya

Célok:

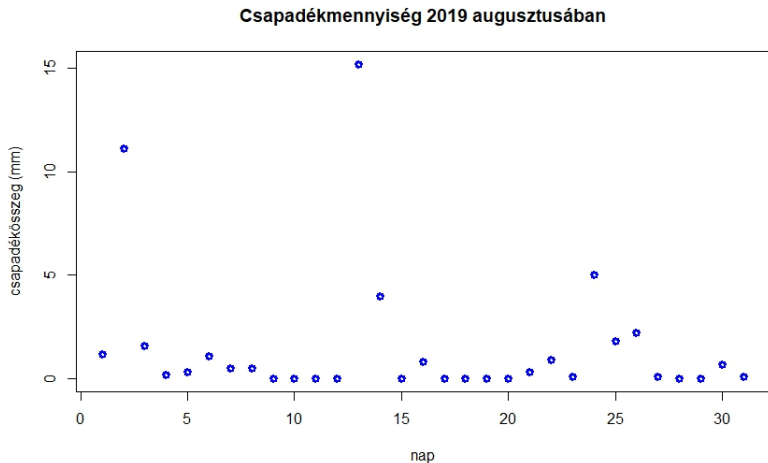
- véletlen folyamatok előrejelzése, például: időjárás-előrejelzés
- mérések során összegyűjtött adatok elemzése, hipotézisek vizsgálata, például
 - ▶ igaz-e, hogy egy adott ponton a légszennyezettség egy mérőszáma, például a CO-koncentrációja meghaladja az egészségügyi határértéket?
 - ▶ igaz-e, hogy egy bizonyos anyag koncentrációja a talaj mélyebb rétegeiben szignifikánsan nagyobb, mint a felső rétegekben?
 - ▶ igaz-e, hogy két anyag gyakran fordul elő egyszerre bizonyos kőzetekben?
 - ▶ igaz-e, hogy a Föld éves átlaghőmérséklete szignifikánsan növekszik?
- a véletlennel kapcsolatos alapfogalmak megismerése, például: fáklyadiagram

Csapadékmennyiség 2019 augusztusában



Forrás: Országos Meteorológiai Szolgálat (www.met.hu)

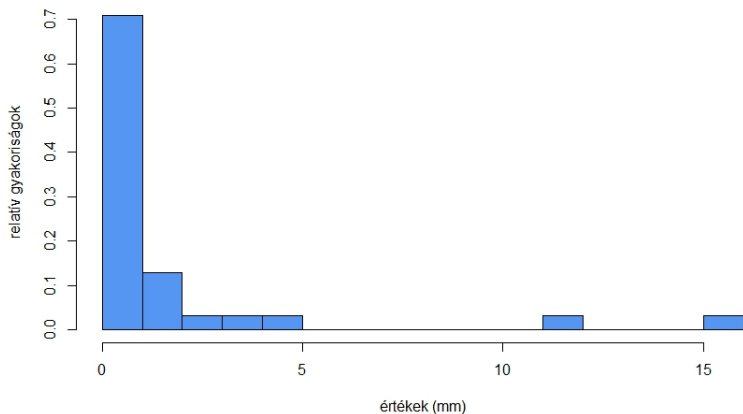
Csapadékmennyiség 2019 augusztusában



Forrás: Országos Meteorológiai Szolgálat (www.met.hu)

A csapadékmennyiség hisztogramja

Hisztogram



Az adatok forrása: Országos Meteorológiai Szolgálat (www.met.hu)

Hisztogram készítése

- Vegyünk egy intervallumot, ami a legkisebb megfigyelést (a **minimumot**) és a legnagyobb megfigyelést (a **maximumot**) is tartalmazza.
- Az intervallumot osszuk k egyenlő részre (ahol jó esetben a megfigyelés száma jóval nagyobb k -nál).
- Az intervallumok fölé rajzolt oszlopok magassága **azzal arányos**, hogy **hány megfigyelés esik az adott intervallumba**.
- Az oszlopok összterülete 1 legyen.

Erről leolvashatjuk például annak becslését, hogy a csapadékmennyiség 2 és 3 mm közé esik, vagy 3 és 10 mm közé esik.

Valószínűségi változók

események (egy kísérlet eredményéhez **igen vagy nem** tartozik):

- A : holnap lesz csapadék Budapesten
- B : holnapután lesz csapadék Budapesten
- C : egy kőzetminta tartalmaz vasat

Valószínűségi változók

események (egy kísérlet eredményéhez **igen vagy nem** tartozik):

- A : holnap lesz csapadék Budapesten
- B : holnapután lesz csapadék Budapesten
- C : egy kőzetminta tartalmaz vasat

valószínűségi változók (egy kísérlet eredményéhez egy **szám** tartozik):

- X : a holnap Budapesten lehulló csapadék mennyisége mm-ben
- Y : a holnapután Budapesten lehulló csapadék mennyisége mm-ben
- Z : egy kőzetminta vastartalmára vonatkozó mérés eredménye (tömegszázalékban) – ha van **véletlen mérési hiba**

Valószínűségi változók jellemzése

- X : a holnap lehulló csapadék mennyisége mm-ben $\rightarrow \mathbb{P}(X \leq 5)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy holnap **legfeljebb 5 mm** csapadék esik;
- Y : a holnaputáni csapadék mennyisége mm-ben $\rightarrow \mathbb{P}(Y \geq 10)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy holnapután Budapesten **legalább 10 mm csapadék esik**
- Z : egy kőzetminta vastartalmára vonatkozó mérés eredménye tömegszázalékban $\rightarrow \mathbb{P}(Z \geq 53)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy a kőzetminta vastartalmát **legalább 53%-nak** mérjük

Valószínűségi változók jellemzése

- X : a holnap lehulló csapadék mennyisége mm-ben $\rightarrow \mathbb{P}(X \leq 5)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy holnap **legfeljebb 5 mm** csapadék esik;
- Y : a holnaputáni csapadék mennyisége mm-ben $\rightarrow \mathbb{P}(Y \geq 10)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy holnapután Budapesten **legalább 10 mm csapadék esik**
- Z : egy kőzetminta vastartalmára vonatkozó mérés eredménye tömegszázalékban $\rightarrow \mathbb{P}(Z \geq 53)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy a kőzetminta vastartalmát **legalább 53%-nak** mérjük

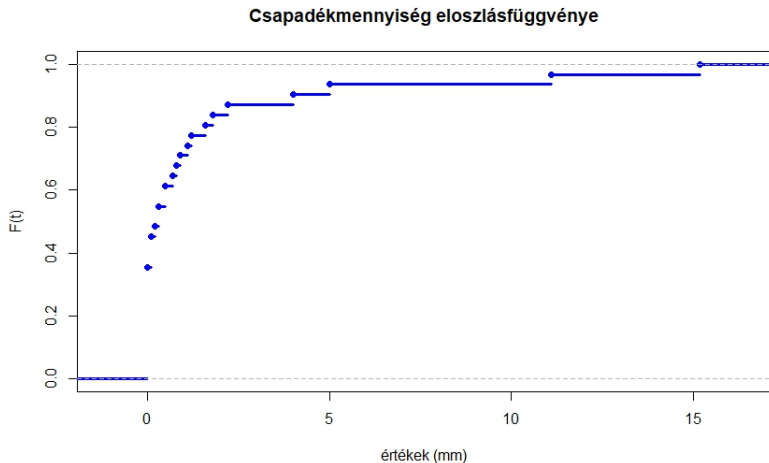
Ha X **valószínűségi változó**, akkor tetszőleges t valós számra a $\mathbb{P}(X \leq t)$ valószínűség értelmes.

Ekkor annak valószínűsége, hogy X az a és b közé esik:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$$

\rightarrow ez kellett a **hisztogram** készítéséhez

Eloszlásfüggvény



Az adatok forrása: Országos Meteorológiai Szolgálat (www.met.hu)

Eloszlásfüggvény: definíció

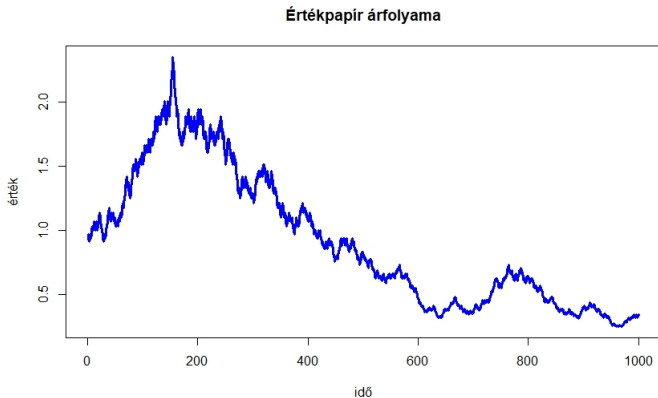
Legyen X **valószínűségi változó** (egy véletlen kísérlet eredményeként kapott szám).
Ekkor X **eloszlásfüggvénye** az alábbi $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ valós számra.

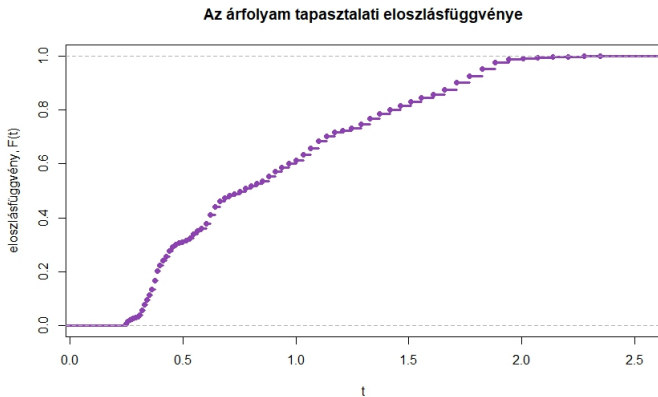
Ez **minden valószínűségi változóra** és minden $t \in \mathbb{R}$ valós számra értelmes.

Eloszlásfüggvény: példa



Egy elképzelt értékpapír árfolyama 1000 napon keresztül, 1000 forintban

Eloszlásfüggvény: példa



t függvényében a t -nél nem nagyobb árfolyamú napok aránya az előző példában

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen X valószínűségi változó. Ekkor X eloszlásfüggvénye az alábbi $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \text{ minden } t \in \mathbb{R} \text{ valós számra.}$$

Állítás

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, és F az X eloszlásfüggvénye, akkor

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen X valószínűségi változó. Ekkor X eloszlásfüggvénye az alábbi $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \text{ minden } t \in \mathbb{R} \text{ valós számra.}$$

Állítás

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, és F az X eloszlásfüggvénye, akkor

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Állítás (Az eloszlásfüggvény tulajdonságai)

Legyen X valószínűségi változó, F pedig az eloszlásfüggvénye. Ekkor

- (i) F monoton növekvő: $a < b$ esetén $F(a) \leq F(b)$.
- (ii) $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$.
- (iii) F jobbról folytonos, azaz minden $t \in \mathbb{R}$ valós számra $\lim_{s \rightarrow t+} F(s) = F(t)$.