

1. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. okt. 17.

- (1) Szabályos pénzérmével dobunk ötször.
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy több fejet dobunk, mint írást? (5 pont)
 - (b) Feltéve, hogy több fejet dobunk, mint írást, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan három fejet dobtunk? (5 pont)
- (2) Egy társasjátékban minden körben két szabályos dobókockával dobunk. Jelölje X , hogy hányadik körben fordul elő először, hogy a két dobott szám egyike sem több 2-nél. Mennyi X várható értéke? (10 pont)
- (3) Egy közlekedési társaság 60 Siemens és 40 CAF villamost üzemeltet. Minden egyes napon a többitől függetlenül hibásodnak meg az egyes villamosok, a Siemens villamosok 0,01 valószínűséggel, a CAF villamosok 0,02 valószínűséggel.
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott napon pontosan két Siemens és egy CAF villamos romlik el? (5 pont)
 - (b) Mennyi az egy napon meghibásodó villamosok számának várható értéke? (5 pont)
- (4) Tegyük fel, hogy egy versenyen a sportolók 10%-a doppingol. A teszt a doppingolást 80% valószínűséggel mutatja ki, viszont a doppingszert nem használók mintáját 3% valószínűséggel tévesen szabálytalannak jelzi. Feltéve, hogy egy sportoló mintájában doppingszer használatát mutatták ki, mennyi a valószínűsége, hogy valóban doppingolt? (10 pont)
- (5) Egy étteremben ötféle menü közül lehet választani. Egy tízfős társaságból mindenki a többiektől függetlenül $1/5$ valószínűséggel választja mindegyiket. Mennyi a valószínűsége, hogy a szakácsnak mind az ötféle ételből kell készítenie? (10 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 15 pont, ennél alacsonyabb pontszám esetén pótzh-t kell írni. Ponthatárok két zh után: 30, 45, 60, 75.

2. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. dec. 5.

- (1) Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen választott magyar férfi testmagassága normális eloszlású 176 várható értékkel és 8 szórással (centiméterben mérve). Megmérjük Péter testmagasságát. Minek nagyobb a valószínűsége: hogy Péter magasabb 190 centiméternél, vagy hogy a magassága 172 és 180 centiméter közé esik? (10 pont)
- (2) Tegyük fel, hogy egy ember reakcióideje, X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, vagyis sűrűségfüggvénye: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, ha $t > 0$, és 0 különben. Számítsuk ki a $\mathbb{P}(X > 2t)/\mathbb{P}(X > t)$ hányadost (itt $t > 0$ rögzített pozitív szám) (4 pont), továbbá X^3 várható értékét. (6 pont)
- (3) Az (X, Y) valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye egy megfelelő c számmal: $f(x, y) = ce^{-y}$, ha $0 < x < y$, és 0 különben. Határozzuk meg c -t, és számítsuk ki az X valószínűségi változó sűrűségfüggvényét (5 pont) és várható értékét. (5 pont)
- (4) Legyenek X és Y független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, a várható értékük 8. Számítsuk ki $X+Y$ és $X-2Y$ korrelációs együtthatóját. (8 pont) Igaz-e, hogy $X+Y$ és $X-2Y$ függetlenek? (2 pont)
- (5) Legyenek X_1, \dots, X_{100} független, 2 várható értékű, 1 szórási valószínűségi változók. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján adjunk alsó becslést annak valószínűségére, hogy $1 \leq X \leq 3$. (10 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 15 pont, ennél alacsonyabb pontszám esetén pótzh-t kell írni. Ponthatárok két zh után: 30, 45, 60, 75.

Pótzh: december 20., szerda, 14-16, É 0.87. A pótzh-ra **december 18-ig emailen jelentkezni kell**, azt is megadva, hogy az első vagy a második témakörből történik a javítás: agnes@cs.elte.hu.

A pontszámok a neptun \rightarrow kurzusok \rightarrow valószínűségszámítás gyakorlat \rightarrow feladatok rovatában lesznek elérhetőek. A kijavított dolgozatokat a december 12-i gyakorlaton lehet megnézni.

A pontszámok a neptun \rightarrow kurzusok \rightarrow valószínűségszámítás gyakorlat \rightarrow feladatok rovatában lesznek elérhetőek.

1. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. okt. 17.

- (1) Lottósorsolásnál 1 – 90-ig számozott golyók közül húznak visszatevés nélkül ötöt. Tíz szelvényel játszunk (egy szelvényen öt számot lehet megjelölni), melyeket egymástól függetlenül töltünk ki, mindegyiknél minden lehetőséget azonos valószínűséggel választva. Mennyi a legalább négytalálatos szelvények számának várható értéke? (10 pont)
- (2) Egy betegségben a lakosság 3%-a szenved. Az erre szolgáló vizsgálaton az egészséges emberek 2%-át tévesen betegnek diagnosztizálják, míg a betegséget 1% valószínűséggel nem veszik észre. Péter részt vesz a vizsgálaton, azt az eredményt kapja, hogy nem beteg. Mennyi a valószínűsége, hogy Péter valóban egészséges? (10 pont)
- (3) Tegyük fel, hogy egy városban az árvizek száma húsz év alatt 10 várható értékű Poisson-eloszlású.
 - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy húsz év alatt pontosan ötször lesz árvíz? (5 pont)
 - (b) Feltéve, hogy ezalatt az időszak alatt legalább kétszer lesz árvíz, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 5 ilyen alkalom lesz? (5 pont)
- (4) Egy szabályos pénzérmével négyszer dobunk. Jelölje X , hogy milyen hosszú a leghosszabb, csak fejből álló sorozat (például FFIF esetén 2). Számítsuk ki X várható értékét és szórását. (10 pont)
- (5) Tízszer dobunk egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy minden szám szerepel? (10 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 15 pont, ennél alacsonyabb pontszám esetén pótzh-t kell írni. Ponthatárok két zh után: 30, 45, 60, 75.

2. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. dec. 5.

- (1) Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen választott magyar nő testmagassága normális eloszlású 164 várható értékkel és 6 szórással (centiméterben mérve). Milyen m értékre igaz, hogy egy véletlenszerűen választott magyar nő 20% valószínűséggel alacsonyabb m -nél? (10 pont)
- (2) Tekintsük a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzetet, és válasszunk belőle egy pontot véletlenszerűen, egyenletesen (a geometriai valószínűség definíciója szerint). Legyen X a pontnak az $x = y$ egyenestől vett távolsága. Számítsuk ki X sűrűségfüggvényét (6 pont) és várható értékét. (4 pont)
- (3) Tegyük fel, hogy az (X, Y) valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye: $f(x, y) = cx^2y^3$, ha $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, és 0 különben. Számítsuk ki c értékét, az X^2 valószínűségi változó várható értékét (8 pont), és X és Y kovariációját. (2 pont)
- (4) Legyenek X és Y független 10 várható értékű és 1 szórási, normális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki $X+3Y$ és $X-Y$ korrelációs együtthatóját. (10 pont)
- (5) Tízyszer dobunk egy szabályos dobókockával. Legyen Y a dobott számok átlaga. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján adjunk alsó becslést annak valószínűségére, hogy $3 \leq Y \leq 4$. (10 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 15 pont, ennél alacsonyabb pontszám esetén pótzh-t kell írni. Ponthatárok két zh után: 30, 45, 60, 75.

Pótzh: december 20., szerda, 14-16, É 0.87. A pótzh-ra **december 18-ig emailen jelentkezni kell**, azt is megadva, hogy az első vagy a második témakörből történik a javítás: agnes@cs.elte.hu.

A pontszámok a neptun \rightarrow kurzusok \rightarrow valószínűségszámítás gyakorlat \rightarrow feladatok rovatában lesznek elérhetőek. A kijavított dolgozatokat a december 12-i gyakorlaton lehet megnézni.

A (2) feladat megoldása. Először X eloszlásfüggvényét, F -et határozzuk meg. Definíció szerint $F(t) = \mathbb{P}(X < t)$. Mivel $0 \leq X \leq 1/\sqrt{2}$ biztosan teljesül ($1/\sqrt{2}$ az átló felének a hossza), $F(t) = 0$, ha $t < 0$, és $F(t) = 1$, ha $t > 1/\sqrt{2}$. Legyen tehát most $0 < t < 1/\sqrt{2}$ rögzített. Azok a pontok a négyzetben, amiknek a távolsága legfeljebb t távolságra vannak az $x = y$ egyenestől (vagyis amire $X < t$), két trapézban vannak, az $x = y$ egyenessel párhuzamos, tőle t távolságra lévő egyenesek között. Azok a pontok, amelyekre $X \geq t$, a két kimaradó derékszögű háromszögben vannak, melyek befogója $1 - 2\sqrt{t}$. Így az $X \geq t$ feltételt teljesítő pontok halmazának összterülete $2 \cdot (1 - 2\sqrt{t})^2/2 = 1 - 2\sqrt{2}t + 2t^2$. Az $X < t$ feltételt az 1 területű négyzet maradék részében lévő pontok teljesítik (ez tehát a két trapéz), így

$$F(t) = \mathbb{P}(X < t) = 1 - (1 - 2\sqrt{2}t + 2t^2) = 2\sqrt{2}t - 2t^2, \quad \text{ha } 0 < t < 1/\sqrt{2}.$$

Ha van az eloszlásnak sűrűségfüggvénye, akkor az az eloszlásfüggvényből deriválással kapható meg. Az eloszlásfüggvény deriváltja:

$$f(t) = \begin{cases} 2\sqrt{2} - 4t, & 0 < t < 1/\sqrt{2} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\int_{-\infty}^t f(s)ds = F(t)$, így ez valóban X sűrűségfüggvénye lesz.

A sűrűségfüggvényből a várható értéket definíció alapján számoljuk:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{1/\sqrt{2}} 2\sqrt{2}t - 4t^2 dt = 2\sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{1/\sqrt{2}} - 4 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}.$$