

1. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. dec. 20.

- (1) Legyen X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki $|X|$ várható értékét. (10 pont)
- (2) Tegyük fel, hogy a férfiak testmagassága 176 várható értékű 8 szórású normális eloszlású valószínűségi változó, míg a nők 164 várható értékű 6 szórású normális eloszlású (centiméterben számolva). A Φ függvényvel kifejezve mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott ember magassága 160 és 170 cm közé esik? (4 pont) Mennyi egy véletlenszerűen választott ember testmagasságának szórása? (6 pont) Feltételezhetjük, hogy egy a férfiak és nők aránya megegyezik.
- (3) Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek paramétere 1. Számítsuk ki az $\int_0^X e^{Xt} dt$ valószínűségi változó várható értékét. (10 pont)
- (4) Tekintsük a következő valószínűségi mezőt: $\Omega = [0, 1]$, a Borel-halmazok σ -algebrájával és a λ Lebesgue-mértékkel. Minden $n \geq 1$ -re legyen

$$X_n = \frac{n}{\log n} \mathbb{I}_{((0, 1/n))}$$

valószínűségi változók sorozata.

Bizonyítsuk be, hogy $X_n \rightarrow 0$ teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow 0$, de $\sup_n X_n$ nem véges várható értékű. (10 pont)

- (5) Y_1, Y_2, \dots legyenek nemnegatív valószínűségi változók, legyen $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$, és tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_n) \leq 1/n^2$. Bizonyítsuk be, hogy minden $t > c$ -re

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n < t\right) \geq 1 - \frac{c}{t}.$$

(10 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

2. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. dec. 4.

- (1) Legyenek X_1 és X_2 független szabályos kockadobások. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(X_1 X_2^2 | X_1)$ feltételes várható értéket. (8 pont)
- (2) Tegyük fel, hogy az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye: $f(x, y) = e^{-y}$, ha $0 < x < y$, és 0 különben. Számítsuk ki a $\mathbb{E}(X^4 | Y)$ feltételes várható értéket. (12 pont)
- (3) Legyenek X és Y független normális eloszlású valószínűségi változók, m várható értékkel és $\sigma > 0$ szórással. Számítsuk ki $X + Y$ és $X - Y$ együttes sűrűségfüggvényét. (8 pont) Milyen m, σ párokra igaz, hogy $X + Y$ és $X - Y$ függetlenek? (2 pont)
- (4) Legyenek X_1 és X_2 független 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Az Y valószínűségi változó ezektől független, $1/2$ valószínűséggel 1-et, $1/2$ valószínűséggel -1 -et vesz fel. Számítsuk ki $X_1 - X_2$ (4 pont) és $Y X_1$ (4 pont) karakterisztikus függvényét. Igaz-e, hogy $X_1 - X_2$ és $Y X_1$ azonos eloszlásúak? (2 pont)
- (5) Legyen X_n olyan valószínűségi változó, mely egyenletes eloszlású az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazon (azaz véletlenszerűen választunk egy számot a halmazból, minden számot azonos valószínűséggel választva). Számítsuk ki X_n/n karakterisztikus függvényét (4 pont), és bizonyítsuk be, hogy az X_n/n sorozat eloszlásban konvergens. (4 pont) Milyen eloszlású a limesz? (2 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 10 pont, ennél alacsonyabb pontszám esetén pótzht kell írni. Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

2. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. dec. 20.

- (1) Legyen (S_n) egyszerű szimmetrikus bolyongás, és $Y_n = t^n \left(\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}\right)^{S_n}$. Milyen c -re lesz igaz, hogy $\mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = c Y_{n-1}$ minden $n \geq 1$ -re, ha $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$? (10 pont)
- (2) Legyen az (X, Y) valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye a következő: $f(x, y) = 6xy^2$, ha $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, és 0 különben. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(X^3 | Y)$ feltételes várható értéket. (10 pont)
- (3) Legyenek X és Y független normális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki $X + 2Y$ és $X - 2Y$ együttes sűrűségfüggvényét. (8 pont) Függetlenek-e ezek a valószínűségi változók? (2 pont)
- (4) ξ_1, ξ_2, \dots független valószínűségi változók, eloszlásuk: $P(\xi_n = 1) = 1/n, P(\xi_n = 0) = 1 - 1/n$. Mihez tart eloszlásban $n \rightarrow \infty$ esetén

$$Y_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - \mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_n)}{D(\xi_1 + \dots + \xi_n)}?$$

Ehhez először írjuk fel Y_n karakterisztikus függvényét. (10 pont)

- (5) Legyen X_n olyan valószínűségi változó, mely egyenletes eloszlású a $\{-2n, -2n + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, 2n\}$ halmazon (azaz véletlenszerűen választunk egy számot a halmazból, minden számot azonos valószínűséggel választva). Határozzuk meg X_n/n eloszlásbeli limeszét. (10 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

2. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. dec. 6.

- (1) Legyenek X_1, \dots, X_n olyan független valószínűségi változók, melyek értéke p valószínűséggel 1, különben -1 . Legyen $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Van-e olyan $p \in [0, 1]$, hogy $\mathbb{E}(S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n) = S_n$ teljesül minden $n \geq 1$ -re? (10 pont)
- (2) Legyen az (X, Y) valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye a következő: $f(x, y) = 2$, ha $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ és $x + y \leq 1$, és 0 különben. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(X | Y)$ feltételes várható értéket. (10 pont)
- (3) Legyen X standard normális eloszlású valószínűségi változó, Φ az eloszlásfüggvénye. Határozzuk meg $\Phi(X)$ sűrűségfüggvényét. (10 pont)
- (4) A Mikulás a következő játékot játssza n gyerekkel. Minden gyerek egy szabályos dobókockával dob, majd annyi szaloncukrot kap, ahányat dobott. Jelölje X_n , hogy a gyerekek átlagosan hány szaloncukrot kapnak így. Számítsuk ki X_n karakterisztikus függvényét. (6 pont) Határozzuk meg X_n eloszlásbeli limeszét, ha $n \rightarrow \infty$. (2 pont)
- (5) Legyen X_n olyan valószínűségi változó, mely egyenletes eloszlású a $\{-n, -n + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$ halmazon (azaz véletlenszerűen választunk egy számot a halmazból, minden számot azonos valószínűséggel választva). Számítsuk ki X_n/n karakterisztikus függvényét (4 pont), és bizonyítsuk be, hogy az X_n/n sorozat eloszlásban konvergens. (4 pont) Milyen eloszlású a limesz? (2 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 10 pont, ennél alacsonyabb pontszám esetén pótzht kell írni. Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

1. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. okt. 16.

- (1) Tegyük fel, hogy az egymást követő napokon a csapadékmennyiség független, továbbá minden nap 0,4 valószínűséggel nincs csapadék, ha pedig van, akkor az eloszlása (milliméterben mérve) exponenciális eloszlás 1/2 paraméterrel. Határozzuk meg a jövő heti (azaz hét nap alatt lehulló) csapadék várható értékét és szórását. (10 pont)
- (2) Legyenek X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az alábbi feltételes valószínűséget:

$$\mathbb{P}(|X| + |Y| < 1 | X^2 + Y^2 < 1).$$

(10 pont)

- (3) Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Legyen továbbá Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Számítsuk ki a $\Phi(X)$ valószínűségi változó várható értékét. (10 pont)
- (4) Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Legyen továbbá $X_n = X^2 \mathbb{I}(X \leq n)$ minden $n \geq 1$ egészre. Határozzuk meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n)$$

határértéket. (10 pont)

- (5) Y_1, Y_2, \dots legyenek nemnegatív valószínűségi változók, legyen $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$, és tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = c < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy minden $t > c$ -re

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n < t\right) \geq 1 - \frac{c}{t}.$$

(10 pont)

1. zárthelyi, valószínűségszámítás, 2017. okt. 18.

- (1) Legyenek Y és Z független valószínűségi változók, az Y eloszlása Poisson-eloszlású λ paraméterrel, Z eloszlása pedig egyenletes eloszlás a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg $Y + Z$ eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását. (10 pont)
- (2) Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen $f(t) = C\lambda^a t^{a-1} \exp(-\lambda t) \mathbb{I}(t > 0)$ megfelelő C számmal, ahol a és λ rögzített pozitív számok. Legyen $m_k = \mathbb{E}(X^k)$. Számítsuk ki az m_k/m_{k-1} hányadost tetszőleges $k \geq 1$ -re. (10 pont)
- (3) Legyen X standard normális eloszlású valószínűségi változó, a Φ függvény pedig a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(\Phi(X))$ várható értékét. (10 pont)
- (4) Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke véges. Legyen $X_n = \mathbb{I}(|X| \geq \sqrt{n})$. Számítsuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} D(X_n)$ határértéket. (10 pont)
- (5) Legyenek Y_1, Y_2, \dots a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Legyen $X_j = \mathbb{I}(Y_j < 1/j^2)$ minden $j \geq 1$ -re. Bizonyítsuk be, hogy

$$t \cdot \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n X_j > t\right) \leq \frac{\pi^2}{6}$$

teljesül minden pozitív t -re. (10 pont)

Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

1. zárthelyi dolgozat, valószínűségszámítás, 2017. okt. 16.

- (1) Tegyük fel, hogy az egymást követő napokon a csapadékmennyiség független, továbbá minden nap 0,4 valószínűséggel nincs csapadék, ha pedig van, akkor az eloszlása (milliméterben mérve) exponenciális eloszlás 1/2 paraméterrel. Határozzuk meg a jövő heti (azaz hét nap alatt lehulló) csapadék várható értékét és szórását. (10 pont)
- (2) Legyenek X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az alábbi feltételes valószínűséget:

$$\mathbb{P}(|X| + |Y| < 1 | X^2 + Y^2 < 1).$$

(10 pont)

- (3) Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Legyen továbbá Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Számítsuk ki a $\Phi(X)$ valószínűségi változó várható értékét. (10 pont)
- (4) Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Legyen továbbá $X_n = X^2 \mathbb{I}(X \leq n)$ minden $n \geq 1$ egészre. Határozzuk meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n)$$

határértéket. (10 pont)

- (5) Y_1, Y_2, \dots legyenek nemnegatív valószínűségi változók, legyen $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$, és tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = c < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy minden $t > c$ -re

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n < t\right) \geq 1 - \frac{c}{t}.$$

(10 pont)

1. zárthelyi, valószínűségszámítás, 2017. okt. 18.

- (1) Legyenek Y és Z független valószínűségi változók, az Y eloszlása Poisson-eloszlású λ paraméterrel, Z eloszlása pedig egyenletes eloszlás a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg $Y + Z$ eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását. (10 pont)
- (2) Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen $f(t) = C\lambda^a t^{a-1} \exp(-\lambda t) \mathbb{I}(t > 0)$ megfelelő C számmal, ahol a és λ rögzített pozitív számok. Legyen $m_k = \mathbb{E}(X^k)$. Számítsuk ki az m_k/m_{k-1} hányadost tetszőleges $k \geq 1$ -re. (10 pont)
- (3) Legyen X standard normális eloszlású valószínűségi változó, a Φ függvény pedig a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(\Phi(X))$ várható értékét. (10 pont)
- (4) Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke véges. Legyen $X_n = \mathbb{I}(|X| \geq \sqrt{n})$. Számítsuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} D(X_n)$ határértéket. (10 pont)
- (5) Legyenek Y_1, Y_2, \dots a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Legyen $X_j = \mathbb{I}(Y_j < 1/j^2)$ minden $j \geq 1$ -re. Bizonyítsuk be, hogy

$$t \cdot \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n X_j > t\right) \leq \frac{\pi^2}{6}$$

teljesül minden pozitív t -re. (10 pont)

Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

Az okt. 18-i (1) feladat megoldása.

Az $Y + Z$ összeg eloszlásfüggvényét jelöljük F -fel. Alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét az $\{Y = k\}, k = 0, 1, 2, \dots$ teljes eseményrendszerre, és használjuk fel, hogy Y Poisson-eloszlású:

$$F(t) = \mathbb{P}(Y < t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y + Z < t | Y = k) \cdot \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y + Z < t | Y = k) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

A feltételes valószínűségeket kell meghatározni. Mivel Z a $[0, 1]$ intervallumban veszi fel az értékeit, az $Y = k$ feltétel mellett az $Y + Z$ összeg a $[k, k + 1]$ intervallumba esik. Ezért ha $t > k + 1$, akkor $Y = k$ esetén $Y + Z < t$ biztosan teljesül, a feltételes valószínűség ezekre a k -ra 1 lesz. Ha $k \geq t$, akkor $Y + Z$ is legalább t , így ezekben az esetekben a feltételes valószínűség 0. Végül ha $t - 1 \leq k < t$, akkor az $Y = k$ feltétel mellett $Y + Z < t$ pontosan akkor teljesül, ha $Z < t - k$, ami most egy $[0, 1]$ közötti szám. Mivel Z egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, eloszlásfüggvénye ebben a tartományban t , vagyis ez a feltételes valószínűség $k - t$ -vel lesz egyenlő.

Tehát a feltételes valószínűség 1, ha $t > k + 1$, azaz $\lceil t \rceil \geq k + 2$; $k - t$, ha $t - 1 \leq k < t$, azaz $k < t \leq k + 1$, ami másképpen $\lceil t \rceil = k + 1$, és 0 különben. Ezek alapján

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\lceil t \rceil - 2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^{\lceil t \rceil - 1}}{(\lceil t \rceil - 1)!} e^{-\lambda} \cdot (\lceil t \rceil - 1 - t).$$

Negatív t -re ezt mindig 0-nak értjük.

Mivel a várható érték lineáris:

$$\mathbb{E}(Y + Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z) = \lambda + 1/2,$$

a nevezetes eloszlások várható értékére vonatkozó összefüggések alapján.

Mivel Y és Z függetlenek, a szórásnégyzetek összeadódnak:

$$\mathbb{D}^2(Y + Z) = \mathbb{D}^2(Y) + \mathbb{D}^2(Z) = \lambda + \frac{1}{12},$$

szintén hiszen a Poisson-eloszlás várható értéke és szórásnégyzete megegyezik, az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás szórásnégyzete pedig $(b - a)^2/12$.