Alkalmazott matematikus bsc **Valószínűségszámítás 1. zh** 2016. október 20.

1. Az ötöslottón $1-90$-ig számozott golyók közül húznak visszatevéssel ötöt. Mennyi a valószínűsége, hogy van legalább egy 10-nél kisebb és legalább két 80-nál nagyobb szám? (10 pont)

2. Egy szabályos dobókockával tízszer dobunk. Legyen $A$ az az esemény, hogy a dobott hatosok száma 2, $B$ pedig az az esemény, hogy az első két dobás összege 11. Számítsuk ki a $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget. (10 pont)

3. Egy osztályba 15 fiú és 18 lány jár. Azt feltételezzük, hogy a fiúk 27%, a lányok 23% valószínűséggel balkezesek, és a balkezesség független. Mennyi az összes balkezes diák számának várható értéke? (6 pont) Mennyi annak valószínűsége, hogy pontosan 3 balkezes fiú jár az osztályba? (4 pont)

4. András és Balázs egy játékban, ahol minden körben két szabályos dobókockával kell dobni, a következő helyzetig jutott. Ha a dobott számok összege legfeljebb 5, akkor András nyer, ha a dobott számok összege legalább 10, akkor Balázs nyer. A játék addig folyatódik, míg valamelyikük nem nyer (vagyis, ha egyiküknek sem megfelelő a dobás, újra dobnak). Mennyi a valószínűsége, hogy legkésőbb két kör múlva befejeződik a játék? (3 pont) Mennyi a játék végéig hátralévő körök számának várható értéke? (7 pont)

5. Tegyük fel, hogy a júliusi és augusztusi jégesők száma Poisson-eloszlású, egymástól függetlenül. A korábbi megfigyelések szerint júliusban átlagosan $3,62$ jégeső volt, augusztusban $1,87$. Azt feltételezzük, hogy a jégesők számának várható értéke is ennyi az egyes hónapokban. Számítsuk ki a jövő júliusban és augusztusban összesen bekövetkező jégesők számának szórását (5 pont). Számítsuk ki a júliusi jégesők és a júliusban és augusztusban összesen bekövetkező jégesők számának kovarianciáját. (5 pont)

---

A megoldásokat indokolni kell, de gyakorlaton és előadáson elhangzott állításokat nem kell bizonyítani.

50 pontot lehet elérni, a minimum pontszám 10 pont (ha ezt nem sikerül elérni, mindenképpen pótzh-t kell írni). Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

A pontszámokat a neptun "feladatok" rovatában lehet megnézni, a kijavított dolgozatokat pedig a következő gyakorlaton.

---

Beadható feladat a zh alatt (+6 pont): A 4. feladat folyatása (de a legfeljebb három feltétel nélkül). Tegyük fel, hogy minden jégeső a többitől függetlenül $0,2$ valószínűséggel okoz jelentős károkat. Mennyi annak valószínűsége, hogy jövő júliusban pontosan egyszer lesz jelentős kárt okozó jégeső? Milyen eloszlású a jelentős károkat okozó jégesők száma?

Alkalmazott matematikus bsc **Valószínűségszámítás 1. zh** 2016. október 20.

1. Az ötöslottón $1-90$-ig számozott golyók közül húznak visszatevéssel ötöt. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok között van 10-nél kisebb és 90-nél nagyobb is? (10 pont)

2. Egy szabályos pénzérmével százszor dobunk. Legyen $A$ az az esemény, hogy a dobott fejek száma pontosan 55, $B$ pedig az az esemény, hogy az első két dobás fej. Független-e $A$ és $B$? (10 pont)

3. András és Balázs egy játékban, ahol minden körben két szabályos dobókockával kell dobni, a következő helyzetig jutott. Ha a dobott számok összege legfeljebb 5, akkor András nyer, ha a dobott számok összege legalább 10, akkor Balázs nyer. A játék addig folyatódik, míg valamelyikük nem nyer (vagyis, ha egyiküknek sem megfelelő a dobás, újra dobnak). Mennyi a valószínűsége, hogy András nyeri a játékot? (10 pont)

4. Tegyük fel, hogy a júliusi jégesők száma Poisson-eloszlású. A korábbi megfigyelések szerint júliusban átlagosan $3,62$ jégeső volt, így azt feltételezzük, hogy a jégesők számának várható értéke is ennyi. Feltéve, hogy jövő júliusban legfeljebb három jégeső lesz, mennyi a valószínűsége, hogy abban a hónapban egyszer sem lesz jégeső? (10 pont)

5. Egy biztosítónak 15000 autós és 3000 motoros ügyfele van. Az autósok mindegyike $0,1$ valószínűséggel mondja fel szerződését és vált biztosítót év végén, a motorosok mindegyike $0,15$ valószínűséggel, és az ügyfelek mind egymástól függetlenül döntenek. Számítsuk ki jelenlegi ügyfelek közül a jövőre is a biztosítóknál maradók számának várható értékét (5 pont) és szórását. (5 pont)

---

A megoldásokat indokolni kell, de gyakorlaton és előadáson elhangzott állításokat nem kell bizonyítani.

50 pontot lehet elérni, a minimum pontszám 10 pont (ha ezt nem sikerül elérni, mindenképpen pótzh-t kell írni). Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

A pontszámokat a neptun "feladatok" rovatában lehet megnézni, a kijavított dolgozatokat pedig a következő gyakorlaton.

---

Beadható feladat a zh alatt (+6 pont): A 4. feladat folyatása (de a legfeljebb három feltétel nélkül). Tegyük fel, hogy minden jégeső a többitől függetlenül $0,2$ valószínűséggel okoz jelentős károkat. Mennyi annak valószínűsége, hogy jövő júliusban pontosan egyszer lesz jelentős kárt okozó jégeső? Milyen eloszlású a jelentős károkat okozó jégesők száma?

Alkalmazott matematikus bsc **Valószínűségszámítás 1. zh** 2016. október 19.

1. Az ötöslottón 1-től 90-ig számozott golyók közül húznak ötöt visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy 1 és 30 között pontosan 1, míg 61 és 90 között pontosan 2 szám szerepel a kihúzottak között? (10 pont)

2. Tíz szabályos dobókockával dobunk. Feltéve, hogy legfeljebb egy hatos szerepel a dobott számok között, mennyi a valószínűsége, hogy az első kockával páratlan számot dobtunk? (10 pont)

3. Bálint pénteken a következőket árulja el: szombatra biciklizést tervez. Azt is tudjuk róla, hogy ha reggel napsütéses idő van, akkor biztosan nekiindul, ha borús, de nem esik, akkor 80% valószínűséggel, ha esik, akkor 40% valószínűséggel indul el, különben egy másik napra halasztja a biciklizést. Az előrejelzést is megmutatja, eszerint szombaton reggel 35% valószínűséggel lesz napsütés Bálint lakóhelyén, 25% valószínűséggel borús idő lesz, és 40% valószínűséggel esik az eső. Az időjárásról további információnk nincs, viszont szombaton délelőtt Bálint küld egy képet, amit éppen akkor, a biciklitúrán készített. Ez alapján mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy Bálint lakóhelyén szombaton reggel napsütéses idő volt? (10 pont)

4. Tegyük fel, hogy a júliusi és augusztusi jégesők száma egymástól független, Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Sokéves megfigyeléseink alapján azt feltételezzük, hogy annak valószínűsége, hogy júliusban nincs jégeső, $e^{-5}$, míg annak valószínűsége, hogy augusztusban egyszer sincs jégeső, $e^{-3}$. Határozzuk meg az összes júliusi és augusztusi jégeső számának várható értékét (5 pont) és szórását (5 pont).

5. Egy dobozban négy különböző pár, azaz összesen nyolc darab fülbevaló van. Anna, Bea, Cili és Dia találomra vesznek maguknak két-két darabot. Mennyi az esélye, hogy legalább egyiküknek összeillő fülbevalók jutnak? (10 pont)

---

A megoldásokat indokolni kell, de gyakorlaton és előadáson elhangzott állításokat nem kell bizonyítani.

50 pontot lehet elérni, a minimum pontszám 10 pont (ha ezt nem sikerül elérni, mindenképpen pótzh-t kell írni). Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

A pontszámokat a neptun "feladatok" rovatában lehet megnézni.

---

Beadható feladat a zh alatt (+6 pont): Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ események. A függetlenség definíciójában az alábbi egyenletek közül $2^n - n - 1$ szerepel: $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_j}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_j})$. Ehelyett tekintsük most az alábbi egyenleteket: $\mathbb{P}(A'_1 \cap A'_2 \ldots \cap A'_n) = \mathbb{P}(A'_1) \cdot \mathbb{P}(A'_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A'_n)$, ahol $A'_i$ vagy $A_i$, vagy $\overline{A_i}$. Ilyenből $2^n$ darab van. Ezek közül is elég $2^n - n - 1$ darab, hogy már következzen az $A_1, \ldots, A_n$ események függetlensége? Ha igen, mutassunk példát $n + 1$ olyan egyenlőségre, amit el lehet hagyni.

**Valószínűségszámítás 1. zh, matematikatanár szak**, 2016. október 17.

1. Egy fiókban 10 szürke, 6 fekete és 4 barna zokni van. Visszatevés nélkül húzunk 4 zoknit, minden lehetőséget egyforma valószínűséggel választva.
   (a) Adjuk meg a kihúzott szürke zoknik számának eloszlását. (12 pont)
   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két szürke és egy fekete zoknit húzunk? (12 pont)

2. Hanna minden nap a többitől függetlenül 1/2 valószínűséggel 4-es, 1/2 valószínűséggel 6-os villamossal érkezik az egyetemre. Novemberben 18 tanítási nap lesz.
   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan tízszer érkezik hatos villamossal novemberben? (12 pont)
   (b) Feltéve, hogy novemberben pontosan tízszer érkezik hatos villamossal, mennyi a valószínűsége, hogy november 10-én hatossal jön? (12 pont)

3. Viktor reggel véletlenszerűen dönti el, hogy hogyan indul munkába. $0,2$ valószínűséggel villamossal megy, $0,6$ valószínűséggel biciklivel, különben sétál. Ha gyalog megy, akkor $0,02$ valószínűséggel, ha biciklivel, akkor $0,06$ valószínűséggel, ha villamossal, akkor $0,04$ valószínűséggel késik el. Mennyi a valószínűsége, hogy Viktor elkésik a munkából? (16 pont)

4. Péter 85% valószínűséggel pontosan érkezik a holnap megbeszélt találkozóra, 12% valószínűséggel jön, de késik tíz percet, 3% valószínűséggel nem jön, mert megbetegedett. Öt perccel a megbeszélt időpont után még nincs ott. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy öt perc múlva megérkezik? (16 pont)

5. Egy szabályos dobókockával dobunk négyszer egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy összesen pontosan kétféle számot dobtunk? (Tehát például 4224 jó, de 4322 vagy 1111 nem.) (20 pont)

---

A megoldásokat indokolni kell, de előadáson vagy gyakorlaton szereplő állításokat nem kell bizonyítani.

Összesen ötven pontot lehet elérni, a minimum pontszám 30 pont (ha ezt nem sikerül elérni, pótzh-t kell írni). Ponthatárok két zh után: 0–69: elégtelen; 70–84: 2; 85-99: 2,5; 100–114: 3; 115–129: 3,5; 130–144: 4; 145–159: 4,5; 160–200: 5.

A pontszámokat a neptun "feladatok" rovatában lehet majd megnézni.

---

Pluszfeladat 5 pontért (beadható a zh alatt): Egy állásra $n$ pályázó jelentkezett. Sorban meghallgatjuk őket. A már látott pályázók alkalmassági sorrendjét egyértelműen meg tudjuk állapítani, de nincs semmi információnk arról, hogy a később érkezők hozzájuk képest milyenek. A következő stratégiát választjuk: meghallgatunk $k$ jelentkezőt, őket semmiképpen nem vesszük fel, majd ezután a legelső olyat választjuk, aki minden eddiginél jobb volt (ha van ilyen). Mennyi a valószínűsége, hogy a legalkalmasabb jelentkezőt választjuk? Nagyjából hogyan függ $n$-től az optimális $k$ érték, ha $n$ nagy?

**Valószínűségszámítás 1. zh, matematikus bsc**, 2016. október 19.

1. Legyen $X$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ekkor $[X]$ és $\{X\}$ független. (10 pont)
2. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a $\max(X_1, \dots, X_n)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. (10 pont)
3. Legyenek $X, Y, Z$ független, $\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg

$$\left(\frac{X}{X+Y+Z}, \frac{X+Y}{X+Y+Z}, X+Y+Z\right)$$

   együttes sűrűségfüggvényét. (10 pont)
4. Tegyük fel, hogy az $X$ valószínűségi változó Gamma$(\alpha, \lambda)$ eloszlású.
   (a) Határozzuk meg a $k$. momentumát, azaz az $\mathbb{E}(X^k)$ várható értéket $k = 1, 2, \dots$ esetén. (7 pont)
   (b) Határozzuk meg $X$ szórásnégyzetét. (3 pont)
5. $X$ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg az $R(X, X^2)$ korrelációs együtthatót. (10 pont)

---

A megoldásokat indokolni kell, de előadáson vagy gyakorlaton szereplő állításokat nem kell bizonyítani.

Összesen 50 pontot lehet elérni, az elégséges határa 20 pont. Ponthatárok két zh után: 40, 53, 66, 79.

A pontszámokat a neptun "feladatok" rovatában lehet majd megnézni.

---

Beadható feladat október 26-ig (akár a zh alatt is, 5 pontért): Legyen $X$ egyenletes eloszlású a $[0, Y]$ intervallumon, ahol $Y$ véletlen szám a $[0,1]$ intervallumon. Adjuk meg $X$ sűrűségfüggvényét.