

A feltételes szórásnégyzet tétel

Vásárhelyi Bálint

2011. február 25.

Tétel:

$$\Sigma(X) = E(\Sigma(X|\mathcal{F})) + \Sigma(E(X|\mathcal{F})) \quad (1)$$

Itt definíció szerint

$$\Sigma(X|\mathcal{F}) = E\left((X - E(X|\mathcal{F}))(X - E(X|\mathcal{F}))^T|\mathcal{F}\right) \quad (2)$$

Először írjuk fel a szórásnégyzet definícióját!

$$\Sigma(X) = E(XX^T) - (EX)(EX)^T \quad (3)$$

Ez a teljes várható érték tétele szerint a következővel egyenlő:

$$= E\left(E(XX^T|\mathcal{F})\right) - \left(E(E(X|\mathcal{F}))\right)\left(E(E(X|\mathcal{F}))\right)^T \quad (4)$$

Az első tag megegyezik a feltételes szórásnégyzet és a feltételes várható érték négyzetének összegével (a szórásnégyzet definíciójából), így a következő alakban írhatjuk fel:

$$= E\left(\Sigma(X|\mathcal{F}) + (E(X|\mathcal{F}))(E(X|\mathcal{F}))^T\right) - \left(E(E(X|\mathcal{F}))\right)\left(E(E(X|\mathcal{F}))\right)^T \quad (5)$$

Ezt átcsoportosítva:

$$= E(\Sigma(X|\mathcal{F})) + \left(E\left(E(X|\mathcal{F})(E(X|\mathcal{F}))^T\right) - \left(E(E(X|\mathcal{F}))\right)\left(E(E(X|\mathcal{F}))\right)^T\right) \quad (6)$$

A nagy zárójelekben felismerhetjük az $E(X|\mathcal{F})$ szórásnégyzetét:

$$= E(\Sigma(X|\mathcal{F})) + \Sigma(E(X|\mathcal{F})) \quad (7)$$

Az (1) és a (7) egyenleteket egymás mellé írva az eredeti állítást bizonyítottuk.