Valószínűségszámítás **6. feladatsor** **2009. október 22.**

1. Két szabályos dobókockával dobunk. Jelölje X, hogy hányadik dobásnál lesz először 7 az összeg, Y, hogy hányadik dobásnál lesz először 6 az összeg, Z, hogy hányadik dobásnál lesz hatodszorra hat az összeg. Számítsuk ki ezen valószínűségi változók várható értékét és szórását.

2. Egy urnában 10 piros és 5 kék golyó van. Kihúzunk visszatevés nélkül négyet. Mennyi a húzott piros golyók számának várható értéke és szórása? Mi a válasz, ha visszatevéssel húzunk négyszer az urnából?

3. Júliusban a jégesők száma Poisson-eloszlású, várható értéke 2,01. Mennyi a júliusi jégesők számának szórása?

4. Megadható-e olyan 0 várható értékű és 1 szórású valószínűségi változó, amelyre $P(|X| \geq 2) \geq 0,5$?

5. Hány kísérletet kell végeznünk egy szabályos érmével ahhoz, hogy legalább 0,75 valószínűséggel a fej dobások relatív gyakorisága 0,01-nél kevesebbel térjen el 0,5-től?

6. Két fej-írás sorozat közül azt nevezzük jobbnak, amelyikre 1/2-nél nagyobb annak valószínűsége, hogy egy szabályos érmét dobálva hamarabb következik be, mint a másik. Mutassuk meg, hogy FFI-nél jobb IFF, IFF-nél jobb IIF, IIF-nél jobb FII és végül FII-nél jobb FFI, vagyis ez a „rendezés” nem tranzitív.

7. 100-szor húzunk visszatevéssel egy olyan dobozból, amelyben 1 piros és 2 fehér golyó van. X jelentse a kihúzott piros golyók számát az első 50, Y pedig az első 20 kísérletben. Számítsuk ki X és Y korrelációs együtthatóját.

8. Egy kockát 10-szer feldobunk. X a dobott hatosok száma, Y a dobott páratlan számok száma. Határozzuk meg X és Y korrelációs együtthatóját.

9. Legyen X és Y két független kockadobás eredménye. Határozzuk meg X és $\max(X, Y)$ korrelációs együtthatóját.

10. Legyenek α, β, γ független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók a, b, c paraméterekkel, és $X = \alpha + \gamma$, $Y = \beta + \gamma$. Határozzuk meg X és Y korrelációs együtthatóját.

11. Péter minden nap egymástól függetlenül 0,01 valószínűséggel késik el az iskolából.
a) Mennyi a novemberi késései számának szórása, ha novemberben 21 tanítási nap van?
b) Jelölje X, hogy Péter holnaptól számítva hányadik tanítási napon késik el

először, és Y, hogy hányadik tanítási napon késik el harmadszor. Számítsuk ki X és Y várható értékét és szórását!

12. Melyik sorozat jobb: IFII vagy FIFI? Mennyi rájuk az átlagos várakozási idő?

13. Beadható feladat november 5-ig: Eszter és Anna három érmével játszik. A játék során felváltva dobják fel a birtokukban lévő összes érmét, és a fejre esett érméket átadják társuknak. A játék addig tart, amíg valamelyik dobás után az összes érme az egyik játékoshoz kerül. Kezdetben Eszternél van mind a 3 érme és ő dob először. Mekkora valószínűséggel nyer Eszter?

14. Beadható feladat november 5-ig: Fej vagy írást játszunk, ha fejet dobunk, megnyerjük a tétet, ha írást, elveszítjük. Amikor leülünk játszani, 1 petákunk van, és az a célunk, hogy 5 petákot gyűjtsünk. Feltesszük az összes pénzünket, illetve annyit, amennyi hiányzik a célunk eléréséhez.
   a) Mekkora valószínűséggel érjük el a célunkat?
   b) Mi a válasz, ha óvatos stratégiát játszunk, azaz mindig a petákot teszünk fel?

Eloszlás neve	**értékkészlet**	**eloszlás**	**várható érték**	**szórásnégyzet**	**módusz***
Indikátor ($0 \le p \le 1$ paraméterű)	$\{0,1\}$	$\begin{cases} 1-p & \text{ha } k=0 \\ p & \text{ha } k=1 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$\lfloor 2p \rfloor$**
Binomiális ($0 \le n$ rendű, $0 \le p \le 1$ paraméterű)	$\{0,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$\lfloor (n+1)p \rfloor$
Hipergeometrikus ($0 \le N, 0 \le M \le N, 0 \le n \le N$)	$\{0,\ldots,\min(M,n)\}$	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$	$\left\lfloor \frac{(n+1)(M+1)}{N+2} \right\rfloor$
Poisson ($\lambda > 0$ paraméterű)	$\{0,1,2,\ldots\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$\lfloor \lambda \rfloor$
Geometriai ($0 \le p \le 1$ paraméterű)	$\{1,2,3,\ldots\}$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	1
Negatív binomiális ($1 \le r$ rendű, $0 \le p \le 1$ paraméterű)	$\{r, r+1, r+2, \ldots\}$	$\binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r$	$\frac{r}{p}$	$r\frac{1-p}{p^2}$	$\left\lfloor \frac{r+p-1}{p} \right\rfloor$

* Ha az az érték, aminek az egészrészét képezzük, már egész, akkor az 1-gyel kisebb szám is jó.

** $p = 1$-re a módusz 1.

A feladatsorok letölthetők az alábbi címről: `http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak`