Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** 2009. október 15.

1. Egy osztályba 36-an járnak. Minden fizikaórán a a többi órától függetlenül a tanár kisorsol egy felelőt, véletlenszerűen, egyenletesen, azaz mindig mindenki egyforma valószínűséggel felel. Mennyi a valószínűsége, hogy karácsonyig mindenki legalább egyszer felel, ha karácsonyig 44 fizikaóra van? (12 pont)

2. Egy fiókban 20 egyforma pár kesztyű van. Kihúzunk közülük egyszerre, véletlenszerűen 5 darabot.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 darab jobbkezes kesztyűt húzunk? (5 pont)
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy fel tudunk öltözni, azaz húzunk jobb és bal kézre való kesztyűt is? (7 pont)

3. Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk egymás után. Legyen A az az esemény, hogy az első két dobás összege 7, B az az esemény, hogy a második két dobás összege 7, végül C az az esemény, hogy a második dobás 6. Igaz-e, hogy A, B és C teljesen függetlenek? (12 pont)

4. Egy zsákban két pénzérme van, melyek alakja megegyező. Az egyik szabályos, a másikkal azonban 1/3 a fej és 2/3 az írás dobásának valószínűsége. Véletlenszerűen kihúzunk egy érmét a zsákból, és dobunk vele 15-ször.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy éppen 8-szor dobunk fejet? (7 pont)
   b) Feltéve, hogy a 15 dobásból 8 fej, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos pénzérmét húztuk? (7 pont)

5. Megadjuk az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását:
   $P(X=0, Y=1) = \frac{1}{6}$, $P(X=0, Y=2) = \frac{1}{6}$, $P(X=0, Y=3) = \frac{1}{6}$,
   $P(X=2, Y=1) = \frac{1}{12}$, $P(X=2, Y=2) = \frac{1}{6}$, $P(X=2, Y=3) = \frac{1}{4}$.
   Számítsuk ki $X+Y$ várható értékét! (10 pont)

A megoldásokat indokolni kell, a végeredmény nem elegendő a teljes pontszámhoz. Az előadáson és gyakorlaton szerepelt állításokra, tételekre lehet hivatkozni, ezeket bizonyítani nem kell.

A feladatokból összesen 60 pont szerezhető. Az elégséges érdemjegyhez ebből 20 pont szükséges. Aki a dolgozatot nem írja meg, vagy nem éri el az elégségest, a szorgalmi időszak utolsó hetében vagy a vizsgaidőszak első hetében pótolhatja a dolgozatot.

Az eredmények elérhetők lesznek az ETR infosheet rovatában, a megoldások pedig itt:
`http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak`

Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** 2009. október 15.

1. Egy osztályba 34-en járnak. Minden fizikaórán a a többi órától függetlenül a tanár kisorsol egy felelőt, véletlenszerűen, egyenletesen, azaz mindig mindenki egyforma valószínűséggel felel. Mennyi a valószínűsége, hogy karácsonyig mindenki legalább egyszer felel, ha karácsonyig 42 fizikaóra van? (12 pont)

2. Egy zsákban két pénzérme van, melyek alakja megegyező. Az egyik szabályos, a másikkal azonban 1/4 a fej és 3/4 az írás dobásának valószínűsége. Véletlenszerűen kihúzunk egy érmét a zsákból, és dobunk vele 16-szor.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy éppen 8-szor dobunk fejet? (7 pont)
   b) Feltéve, hogy a 16 dobásból 8 fej, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos pénzérmét húztuk? (7 pont)

3. Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk egymás után. Legyen A az az esemény, hogy az első két dobás összege 7, B az az esemény, hogy a második két dobás összege 7, végül C az az esemény, hogy a második dobás 6. Igaz-e, hogy A, B és C teljesen függetlenek? (12 pont)

4. Egy fiókban 20 egyforma pár kesztyű van. Kihúzunk közülük egyszerre, véletlenszerűen 5 darabot.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 darab jobbkezes kesztyűt húzunk? (5 pont)
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy fel tudunk öltözni, azaz húzunk jobb és bal kézre való kesztyűt is? (7 pont)

5. Megadjuk az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását:
   $P(X=0, Y=1) = \frac{1}{6}$, $P(X=0, Y=2) = \frac{1}{6}$, $P(X=0, Y=3) = \frac{1}{6}$,
   $P(X=2, Y=1) = \frac{1}{4}$, $P(X=2, Y=2) = \frac{1}{6}$, $P(X=2, Y=3) = \frac{1}{12}$.
   Számítsuk ki $X+Y$ várható értékét! (10 pont)

A megoldásokat indokolni kell, a végeredmény nem elegendő a teljes pontszámhoz. Az előadáson és gyakorlaton szerepelt állításokra, tételekre lehet hivatkozni, ezeket bizonyítani nem kell.

A feladatokból összesen 60 pont szerezhető. Az elégséges érdemjegyhez ebből 20 pont szükséges. Aki a dolgozatot nem írja meg, vagy nem éri el az elégségest, a szorgalmi időszak utolsó hetében vagy a vizsgaidőszak első hetében pótolhatja a dolgozatot.

Az eredmények elérhetők lesznek az ETR infosheet rovatában, a megoldások pedig itt:
`http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak`

1. Egy osztályba 36-an járnak. Minden fizikaórán a a többi órától függetlenül a tanár kisorsol egy felelőt, véletlenszerűen, egyenletesen, azaz mindig mindenki egyforma valószínűséggel felel. Mennyi a valószínűsége, hogy karácsonyig mindenki legalább egyszer felel, ha karácsonyig 44 fizikaóra van? (12 pont)

   Legyen A_i az az esemény, hogy az i. tanuló nem felel karácsonyig ($i = 1, 2, \ldots, 36$). Ekkor a következő esemény valószínűségét kell kiszámítanunk:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{36} A_i}.$$

   A komplementer valószínűségére és az $\{A_i\}$ eseményekre vonatkozó szitaformula alapján ez a következőképpen írható:

$$1 - \sum_{i=1}^{36} (-1)^{i+1} S_i = 1 - \sum_{i=1}^{36} (-1)^{i+1} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_i \le 36} P\left(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_i}\right).$$

   $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_i}$ azt jelenti, hogy a $j_1., j_2., \ldots, j_i.$ tanulók nem felelnek. Összesen a 44 fizikaórán 36^{44} féleképpen lehet feleltetni, és mivel minden órán a többitől függetlenül úgy sorsolnak, hogy mindenki egyforma valószínűséggel felel, ezek a feleltetések egyformán valószínűek. Ezért a valószínűséget kiszámíthatjuk úgy, hogy az olyan feleltetések számát, ahol a $j_1., j_2., \ldots, j_i.$ tanuló nem felel, elosztjuk az összes feleltetés számával. Ha i tanuló van kizárva, akkor $36 - i$ tanuló közül lehet választani minden órán, így $(36 - i)^{44}$-féle megfelelő feleltetés van. Ez nem függ attól, hogy melyik i tanulót zártuk ki, azaz a belső összeg minden tagja egyforma. A 36 index közül i darab különbözőt $\binom{36}{i}$ féleképpen választhatunk ki, ennyi tagja van a belső összegnek. Mindezeket összevetve kapjuk annak valószínűségét, hogy karácsonyig mindenki felel:

$$1 - \sum_{i=1}^{36} (-1)^{i+1} \binom{36}{i} \frac{(36-i)^{44}}{36^{44}} = \sum_{i=0}^{36} (-1)^i \binom{36}{i} \left(\frac{36-i}{36}\right)^{44}.$$

2. Egy fiókban 20 egyforma pár kesztyű van. Kihúzunk közülük egyszerre, véletlenszerűen, egyenletesen 5 darabot.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 darab jobbkezes kesztyűt húzunk? (5 pont)
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy fel tudunk öltözni, azaz húzunk jobb és bal kézre való kesztyűt is? (7 pont)

   a) Visszatevés nélkül húzunk, összesen 40 kesztyű van a fiókban, ezek közül 5-öt $\binom{40}{5}$-féleképpen választhatunk öt különbözőt, ennyiféle húzás van. (Egy húzás azt mondja meg, hogy melyik 5 kesztyűt húzzuk ki.) Ezek egyformán valószínűek, mert véletlenszerűen, egyenletesen húzunk. Ezért számolhatunk úgy, hogy azon húzások számát, ahol pontosan 3 darab jobbkezes kesztyű van, elosztjuk az összes húzás számával. A 20 jobbkezes kesztyű közül három különbözőt $\binom{20}{3}$-féleképpen választhatunk ki. A 20 darab balkezes kesztyű közül 2 darabot kell kiválasztani, ha 5-öt húzunk, és három jobbkezes. Ezt $\binom{20}{2}$-féleképpen tehetjük meg. Akárhogyan választottunk a jobbkezes kesztyűk közül, bárhogyan választhatunk a balkezesek közül, ezért szorzással kapjuk meg a lehetséges jó húzások számát. Ezeket összevetve, annak valószínűsége, hogy pontosan 3 darab jobbkezes kesztyűt húzunk:

$$\frac{\binom{20}{3} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{40}{5}}.$$

Hivatkozhatunk arra is, hogy a kihúzott kesztyűk száma hipergeometrikus eloszlású, 40, 20, és 5 paraméterekkel.

b) Az *a)* részben leírtak szerint itt is számolhatunk úgy, hogy a megfelelő húzások számát osztjuk az összes lehetséges húzás számával. Nem tudunk felöltözni, ha csak jobbkezes, vagy csak balkezes kesztyűket húzunk. A 20 darab jobbkezes közül 5 különbözőt $\binom{20}{5}$-féleképpen lehet kiválasztani, ezért ennyi az olyan húzások száma, ahol csak jobbkezes kesztyűk vannak. Ugyanez elmondható a balkezesekre. Ezekből kapjuk annak valószínűségét, hogy fel tudunk öltözni:

$$\frac{\binom{40}{5}-\binom{20}{5}-\binom{20}{5}}{\binom{40}{5}}=1-2\frac{\binom{20}{5}}{\binom{40}{5}}.$$

3. Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk egymás után. Legyen A az az esemény, hogy az első két dobás összege 7, B az az esemény, hogy a második két dobás összege 7, végül C az az esemény, hogy a második dobás 6. Igaz-e, hogy A, B és C teljesen függetlenek? (12 pont)

   Az első két dobás $6\cdot 6=36$-féle lehet, ezek egyformán valószínűek, mert a kocka szabályos. 6 olyan dobás van, ahol az összeg hét: 16, 25, 34, 43, 52, 61. Ezért

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

   Ugyanígy kapjuk, hogy

$$P(B)=\frac{1}{6}.$$

   Mivel a kocka szabályos, világos, hogy

$$P(C)=\frac{1}{6}.$$

$$P(A\cap C)=\frac{1}{36}=P(A)\cdot P(C),$$

   hiszen A és C egyszerre akkor teljesülnek, ha az első dobás 1-es, a második 6-os. Azaz A és C függetlenek. Ugyanígy kapjuk, hogy B és C függetlenek.

   A három dobás $6^3=216$-féle lehet, ezek közül hat olyan van, amire A és B is teljesül, hiszen az első dobás bármi lehet, utána a másik kettő már egyértelmű: 161, 252, 343, 434, 525, 616. Ezért

$$P(A\cap B)=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}=P(A)\cdot P(B),$$

   azaz A és B is függetlenek.

   Végül, az egyetlen olyan dobássorozat van, mely mindhárom feltételt teljesíti: 161. Így

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{216}=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

   Vagyis teljesül páronkénti és hármankénti függetlenség is, a három esemény teljesen független.

4. Egy zsákban két pénzérme van, melyek alakja megegyező. Az egyik szabályos, a másikkal azonban 1/3 a fej és 2/3 az írás dobásának valószínűsége. Véletlenszerűen kihúzunk egy érmét a zsákból, és dobunk vele 15-ször.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy éppen 8-szor dobunk fejet? (7 pont)
   b) Feltéve, hogy a 15 dobásból 8 fej, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos pénzérmét húztuk? (7 pont)

   a) Használjuk a teljes valószínűség tételét a következő eseményekre:
   A: éppen nyolcszor dobunk fejet;

B_1: a szabályos pénzérmét húzzuk ki;
B_2: a szabálytalan pénzérmét húzzuk ki.
B_1 és B_2 teljes eseményrendszert alkot, hiszen komplementerek, pontosan az egyik következik be. B_1 és B_2 valószínűsége is $1/2$, azaz pozitív. Tehát a tétel szerint

$$P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2).$$

Akármelyik pénzérmét húzzuk ki, az egyes dobások egymástól függetlenek, és mindegyik dobásnál azonos valószínűséggel dobunk fejet. Ezért a 15 dobás során a fej dobások száma binomiális eloszlású, a rend 15, a paraméter pedig $1/2$ a szabályos érménél, és $1/3$ a szabálytalannál. Így fel tudjuk írni annak feltételes valószínűségét, hogy éppen 8 fejet dobunk:

$$P(A) = \binom{15}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(1-\frac{1}{2}\right)^7\cdot\frac{1}{2} + \binom{15}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(1-\frac{1}{3}\right)^7\cdot\frac{1}{2}.$$

$$P(A) = \binom{15}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^{15}}+\frac{2^7}{3^{15}}\right).$$

b) $P(B_1|A)$-t kell kiszámítani. Használjuk Bayes tételét az első részben szereplő eseményekre, láttuk, hogy a feltételek teljesülnek. Tehát felhasználva az *a)* feladat eredményeit:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)\,P(B_1)}{P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2)} = \frac{\frac{1}{2^{15}}}{\frac{1}{2^{15}}+\frac{2^7}{3^{15}}}.$$

5. Megadjuk az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását:
$P(X=0, Y=1) = \frac{1}{6}$, $P(X=0, Y=2) = \frac{1}{6}$, $P(X=0, Y=3) = \frac{1}{6}$,
$P(X=2, Y=1) = \frac{1}{12}$, $P(X=2, Y=2) = \frac{1}{6}$, $P(X=2, Y=3) = \frac{1}{4}$.
Számítsuk ki $X+Y$ várható értékét! (10 pont)

X és Y nem negatív, korlátos, valószínűségi változók, várható értékük véges. Ezért összegük várható értéke a várható értékek összege. Az együttes eloszlásból kiolvasható X és Y eloszlása, abból pedig a várható érték definíció alapján számítható. X lehetséges értékei 0 és 2, Y lehetséges értékei 1, 2 és 3.

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0\cdot P(X=0) + 2\cdot P(X=2) = \\
&= 2\cdot\left(P(X=0,Y=1) + P(X=0,Y=2) + P(X=0,Y=2)\right) = \\
&= 2\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = 1. \\
E(Y) &= 1\cdot P(Y=1) + 2\cdot P(Y=2) + 3\cdot P(Y=3) = \\
&= 1\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) + 3\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right) = 2+\frac{1}{6}. \\
E(X+Y) &= 1 + 2 + \frac{1}{6} = 3 + \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

A második feladatsor feladatainak megoldásai hasonlók, a végeredmények:

1.

$$1 - \sum_{i=1}^{34}(-1)^{i+1}\binom{34}{i}\frac{(34-i)^{42}}{34^{42}} = \sum_{i=0}^{34}(-1)^i\binom{34}{i}\left(\frac{34-i}{34}\right)^{42}.$$

2. *a)*

$$P(A) = \binom{16}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{16}} + \frac{3^8}{4^{16}} \right).$$

b)

$$\frac{\frac{1}{2^{16}}}{\frac{1}{2^{16}} + \frac{3^8}{4^{16}}}.$$

3. Igen, és ugyanaz a bizonyítás.

4. *a)*

$$\frac{\binom{20}{2} \cdot \binom{20}{3}}{\binom{40}{5}}.$$

b)

$$\frac{\binom{40}{5} - \binom{20}{5} - \binom{20}{5}}{\binom{40}{5}} = 1 - 2\frac{\binom{20}{5}}{\binom{40}{5}}.$$

5.

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 2 \cdot P(X=2) = \\
&= 2 \cdot (P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=0, Y=2)) = \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = 1. \\
E(Y) &= 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + 3 \cdot P(Y=3) = \\
&= 1 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) = \frac{11}{6}. \\
E(X+Y) &= 1 + \frac{11}{6} = \frac{17}{6} = 2 + \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

1. Válasszunk egy pontot egyenletesen a $[0,1]$ intervallumban, jelölje ezt X. Adjuk meg X^2 eloszlásfüggvényét. (8 pont)

2. Egy osztályba 14 fiú és 18 lány jár. Feltételezzük, hogy minden nap mindenki egymástól függetlenül 1/10 valószínűséggel hiányzik az iskolából. Számítsuk ki a holnap hiányzó lányok és a holnapi összes hiányzó számának korrelációs együtthatóját. (12 pont)

3. Tételezzük fel, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember testmagassága centiméterben mérve 174 várható értékű és 8 szórású normális eloszlású valószínűségi változó.
   a) Mennyi annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember magassága 166 és 178 cm közé esik? (6 pont)
   b) Annánál egy véletlenszerűen kiválasztott ember 1/3 valószínűséggel alacsonyabb. Milyen magas Anna? (6 pont)

4. Egy olyan pénzérmével dobunk sokszor egymás után, melynél a fej dobásának valószínűsége 2/3, az írás dobásának 1/3.
   a) Jelölje X, hogy hányadik dobásra jön ki az első fej. Számítsuk ki X várható értékét és szórását. (8 pont)
   b) Jelölje Y, hogy hányszor kell dobni a FI sorozat megjelenéséhez. Számítsuk ki Y várható értékét. (10 pont)
   c) Beadható feladat december 10-ig: melyik a valószínűbb, a FI vagy az IF sorozat jelenik meg hamarabb?

5. Egy kalapban négy cédula van, 1-4-ig számozva. Négyszer húzunk visszatevéssel. Számítsuk ki a húzott számok összegének várható értékét és szórását. (10 pont)

A megoldásokat indokolni kell, a végeredmény nem elegendő a teljes pontszámhoz. Az előadáson és gyakorlaton szerepelt állításokra, tételekre lehet hivatkozni, ezeket bizonyítani nem kell.

A feladatokból összesen 60 pont szerezhető. Az elégséges érdemjegyhez ebből 20 pont szükséges. Aki a dolgozatot nem írja meg, vagy nem éri el az elégségest, a szorgalmi időszak utolsó hetében vagy a vizsgaidőszak első hetében pótolhatja a dolgozatot. A várható ponthatárok: 40, 58, 76, 94.

Az eredmények elérhetők lesznek az ETR infosheet rovatában, a megoldások pedig itt:
`http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak`
Aki e-mailben is szeretné megkapni az eredményét, írja rá a dolgozatra a címét, vagy írjon ide:
`agnes@cs.elte.hu`

A pótzárthelyikkel és jegybeírással kapcsolatos tudnivalók a kurzusfórumra kerülnek fel.

Eloszlás neve	**értékkészlet**	**eloszlás**	**várható érték**	**szórásnégyzet**	**módusz***
Indikátor ($0 \le p \le 1$ paraméterű)	$\{0,1\}$	$\begin{cases} 1-p & \text{ha } k=0 \\ p & \text{ha } k=1 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$\lfloor 2p \rfloor$**
Binomiális ($0 \le n$ rendű, $0 \le p \le 1$ paraméterű)	$\{0,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$\lfloor (n+1)p \rfloor$
Hipergeometrikus ($0 \le N, 0 \le M \le N, 0 \le n \le N$)	$\{0,\ldots,\min(M,n)\}$	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$	$\left\lfloor \frac{(n+1)(M+1)}{N+2} \right\rfloor$
Poisson ($\lambda > 0$ paraméterű)	$\{0,1,2,\ldots\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$\lfloor \lambda \rfloor$
Geometriai ($0 \le p \le 1$ paraméterű)	$\{1,2,3,\ldots\}$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	1
Negatív binomiális ($1 \le r$ rendű, $0 \le p \le 1$ paraméterű)	$\{r, r+1, r+2, \ldots\}$	$\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r} p^r$	$\frac{r}{p}$	$r\frac{1-p}{p^2}$	$\left\lfloor \frac{r+p-1}{p} \right\rfloor$

* Ha az az érték, aminek az egészrészét képezzük, már egész, akkor az 1-gyel kisebb szám is jó.

** $p = 1$-re a módusz 1.

Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye:
$g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X = k) = E\left(s^X\right)$, ahol ez értelmes.

X, Y valószínűségi változók korrelációs együtthatója, ha ez értelmes:

$$R(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)\,D(Y)} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X)\,E(Y)}{D(X)\,D(Y)}.$$

A kovariancia bilineáris: minden $a, b \in \mathbb{R}$-re és X_1, X_2, Y_1, Y_2 valószínűségi változókra, ha a kovarianciák léteznek, akkor

$$\operatorname{cov}(aX_1, bY_1) = ab\operatorname{cov}(X_1, Y_1),$$

$$\operatorname{cov}(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = \operatorname{cov}(X_1, Y_1) + \operatorname{cov}(X_2, Y_1) + \operatorname{cov}(X_1, Y_2) + \operatorname{cov}(X_2, Y_2).$$

Továbbá ha az X valószínűségi változó szórása létezik, akkor $\operatorname{cov}(X,X) = D^2(X)$.

Markov-egyenlőtlenség: ha X nemnegatív valószínűségi változó, melynek várható értéke véges, és t pozitív szám, akkor

$$P(X \ge t) \le \frac{E(X)}{t}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség: ha az X valószínűségi változó szórása létezik és véges, és t pozitív szám, akkor

$$P(|X - E(X)| \ge t) \le \frac{D^2(X)}{t^2} \quad \text{és} \quad P(|X - E(X)| < t) \ge 1 - \frac{D^2(X)}{t^2}.$$

1. Jelölje X^2 eloszlásfüggvényét F. Definíció szerint minden t valós számra $F(t) = P(X^2 < t)$. Ha $t \geq 0$, világos, hogy $F(t) = P(X^2 < t) = 0$, hiszen X^2 nem lehet negatív. Ugyanakkor, mivel X a $[0,1]$ intervallumba esik, a négyzete sem lehet 1-nél nagyobb, ezért minden $t > 1$-re biztosan kisebb t-nél: $F(t) = P(X^2 < t) = 1$.

   Ha $t \in (0,1]$, akkor $X^2 < t$ pontosan akkor teljesül, ha $0 \leq X < \sqrt{t}$, figyelembe véve, hogy X sem lehet negatív. Mivel X-t a $[0,1]$ intervallumból egyenletesen választottuk, ennek valószínűsége $\sqrt{t}$, a megfelelő pontok által alkotott szakasz hossza. Vagyis ilyenkor

$$F(t) = P\left(X^2 < t\right) = P\left(0 \leq X < \sqrt{t}\right) = \sqrt{t}.$$

   Tehát X^2 eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \geq 0, \\ \sqrt{t}, & \text{ha } 0 < t \leq 1, \\ 1, & \text{ha } t > 1. \end{cases}$$

2. Jelölje X a holnap hiányzó lányok, Y a holnap hiányzó fiúk számát. A holnapi összes hiányzó ekkor $X+Y$, ezért $R(X, X+Y)$-t kell kiszámítani.

   Definíció szerint
$$R(X, X+Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, X+Y)}{D(X)\, D(X+Y)}.$$
   Felhasználva a kovariancia bilinearitását, kapjuk, hogy
$$\operatorname{cov}(X, X+Y) = \operatorname{cov}(X, X) + \operatorname{cov}(X, Y).$$
   Mivel az egyes tanulók hiányzása egymástól teljesen független, a hiányzó fiúk száma is független a hiányzó lányok számától, azaz X Y-tól, emiatt a második tag nulla. Az első tag pedig X szórásnégyzete. Tehát:
$$R(X, X+Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, X+Y)}{D(X)\, D(X+Y)} = \frac{D^2(X)}{D(X)\, D(X+Y)} = \frac{D(X)}{D(X+Y)}.$$
   Mivel minden lány egymástól függetlenül $0,1$ valószínűséggel hiányzik, és l lány van az osztályban, a hiányzó lányok számának eloszlása binomiális l renddel és $p = 0,1$ paraméterrel. Ezért az ismert összefüggés alapján X szórása $\sqrt{lp(1-p)}$. $X+Y$ az összes hiányzó száma, hasonlóképpen kapjuk, hogy ez binomiális eloszlású $f+l$ renddel és $p = 0,1$ paraméterrel, szórása $\sqrt{(l+f)\, p\,(1-p)}$. Ez alapján kapjuk a végeredményt:
$$R(X, X+Y) = \frac{D(X)}{D(X+Y)} = \frac{\sqrt{lp(1-p)}}{\sqrt{(l+f)\, p\,(1-p)}} = \sqrt{\frac{l}{f+l}} = \sqrt{18/32} = 0,75.$$

3. *a)* Jelölje X egy véletlenszerűen kiválasztott ember testmagasságát, tudjuk, hogy X normális eloszlású 174 várható értékkel és 8 szórással. Ismert és könnyen ellenőrizhető, hogy ilyenkor
$$\frac{X - EX}{DX} = \frac{X - 174}{8}$$
   normális eloszlású 0 várható értékkel és 1 szórással, azaz standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ezt felhasználva, a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét Φ-vel jelölve:
$$P(166 < X < 178) = P(-8 < X - 174 < 4) = P\left(-1 < \frac{X - 174}{8} < \frac{1}{2}\right).$$

Felhasználjuk az eloszlásfüggvény definícióját, és azt, hogy abszolút folytonos eloszlásról van szó, ezért szigorú egyenlőtlenség helyett az egyenlőséget is megengedhetjük. Táblázat és a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ azonosság alapján kapjuk a végeredményt:

$$P(166 < X < 178) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(-1) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \Phi(1) \approx 0,6915 - 0 + 0,8413 = 0,5328.$$

b) Jelölje a Anna magasságát centiméterben mérve. Azt tudjuk, hogy

$$P(X < a) = \frac{1}{3}.$$

Az előző feladat átalakításaihoz hasonlóan ebből következik, hogy

$$P\left(\frac{X - 174}{8} < \frac{a - 174}{8}\right) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{a - 174}{8}\right) = \frac{1}{3}.$$

A táblázat segítségével kapjuk meg Anna magasságát centiméterben mérve:

$$\frac{a - 174}{8} \approx \Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0,43 \quad \Rightarrow \quad a \approx -0,43 \cdot 8 + 174 = 170,56.$$

4. *a)* Ha a fej valószínűsége p, és X jelöli, hogy hányadik dobásra jön ki az első fej, akkor X geometriai eloszlású p paraméterrel, hiszen független kísérletsorozatot végzünk, és az első sikeres kísérlet számát figyeljük: $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \quad (k = 1, 2, 3 \ldots)$. Ezért az ismert összefüggések alapján:

$$E(X) = \frac{1}{p} = 3/2, \qquad D(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}} = \sqrt{3}/2 \approx 0,866.$$

b) Jelölje L_0, hogy várhatóan hány további dobás szükséges, ha még nem dobtunk semmit, L_1, hogy várhatóan hány további dobás szükséges, ha már dobtunk egy fejet. Ha fej után írást dobunk, kész, nem kellenek további dobások. Ha fej után fejet kapunk, ez ugyanolyan, mintha csak egy fej lenne. Ha az elején írást dobunk, az pedig ugyanolyan, mintha még nem kezdődött volna el a játék. Így a teljes várható érték tétele alapján:

$$L_0 = 1 + pL_1 + (1-p) L_0, \quad L_1 = 1 + pL_1.$$

A második egyenletből kapjuk, hogy $L_1 = 1/(1-p)$ (másképpen: ha már volt egy fej, FI az első írás dobásnál jelenik meg, így L_1 egy $1-p$ paraméterű geometriai eloszlás várható értéke), az első egyenletből pedig:

$$pL_0 = 1 + p/(1-p) \quad \Rightarrow \quad L_0 = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{3}{2} + 3 = 4,5.$$

Másképpen: játék az első fejnél kezdődik, erre várhatóan $1/p$ lépést kell várni, majd az első írásra várunk, ennek várható lépésszáma $1/(1-p)$.

5. Jelölje X_i az i. húzásra kapott számot $(i = 1, 2, 3, 4)$. Mivel visszatevéssel húzunk, ezek a valószínűségi változók egymástól függetlenek, és azonos eloszlásúak, így várható értékük is megegyezik. Legyen

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

A várható érték linearitása miatt

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} E(X_i) = 4E(X_1).$$

Minden húzásnál minden cédula egyforma, 1/4 valószínűséggel kerül sorra, ezért definíció alapján

$$E(X_1) = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = 2,5 \quad \Rightarrow \quad E(X) = 4 \cdot 10/4 = 10.$$

A függetlenség miatt teljesül, hogy

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{4} D^2(X_i) = 4 \cdot D^2(X_1) \Rightarrow D(X) = 2D(X_1).$$

Szintén definíció alapján:

$$D^2(X_1) = E\left(X_1^2\right) - E(X_1)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2^2+3^2+4^2\right) - 2,5^2 = 1,25.$$

Mindezek alapján a húzott számok összegének szórása:

$$D(X) = 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{5} \approx 2,236.$$

A másik csoport megoldásainak menete hasonló, az eredmények: 1. 0,6614 2. *a)* $3/2$, $\sqrt{12} \approx 3,4641$ *b)* $5\frac{1}{3}$ 4. *a)* 0,5328 *b)* 177,44 cm