Valószínűségszámítás **2. zárthelyi dolgozat** **2008. december 1.**

A csoport

1. Egy szabályos dobókocka oldalain két egyes, két kettes és két négyes áll. Kétszer dobunk egymás után. Számítsuk ki a két dobott szám minimumának várható értékét. (10 pont)

2. Válasszunk egy pontot a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlással. Adjuk meg a kiválasztott pont $\frac{1}{3}$-tól mért távolságának eloszlásfüggvényét. (10 pont)

3. Egy szabályos érmével dobunk addig, amíg először nem jelenik meg az IFF sorozat. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke? (10 pont)

4. Egy zsákban négy egyforma golyó van, egytől négyig megszámozva. Hatvanszor húzunk egymás után visszatevéssel. Jelölje X, hogy ezalatt hányszor húztuk ki a hármas számú golyót. Számítsuk ki X várható értékét és szórását! (10 pont)

5. Egy mosógép élettartamának sűrűségfüggvénye az időt években mérve: $f(x) = \frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}$, ha $x > 0$, és $f(x) = 0$ különben. Mennyi a valószínűsége, hogy a mosógép működésének tizedik évében romlik el? Mennyi a mosógép várható élettartama? (5+5 pont)

6. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, Poisson-eloszlásúak, paraméterük rendre 3 és 5. Számítsuk ki $D(X + Y)$-t és $R(X + Y, Y)$-t. (5+5 pont)

A megoldásokat indokolni kell, a teljes pontszám eléréséhez helyes indoklás és jó végeredmény is szükséges.

A dolgozaton összesen 60 pontot lehet szerezni, minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 20 pont, aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a december 8-i gyakorlaton pótolhatja a dolgozatot. Aki mindkétszer elért legalább 20 pontot, ugyanekkor írhat javító dolgozatot valamelyik témakörből, itt rontani nem lehet.

A ponthatárok összesen: 40, 60, 80, 100. Az eredmények és az ez alapján ajánlott érdemjegyek az ETR infosheet rovatában lesznek olvahatók. Aki ezeket e-mailben is meg szeretné kapni, írja rá a dolgozatára az e-mail címét.

A feladatok megoldásai a http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak címen lesznek elérhetők.

Valószínűségszámítás **2. zárthelyi dolgozat** **2008. december 1.**

B csoport

1. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, Poisson-eloszlásúak, paraméterük rendre 4 és 6. Számítsuk ki $D(X+Y)$-t és $R(X, X+Y)$-t. (5+5 pont)
2. Egy kalapban hat egyforma cédula van, kettőre kettes, kettőre hármas, kettőre négyes van írva. Kétszer húzunk visszatevéssel. Mennyi a két húzott szám maximumának várható értéke? (10 pont)
3. Egy tartóselem élettartamának sűrűségfüggvénye az időt hónapokban mérve: $f(x) = \frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}$, ha $x > 0$, és $f(x) = 0$ különben. Mennyi a valószínűsége, hogy az elem működésének tizedik hónapjában romlik el? Mennyi az elem várható élettartama? (5+5 pont)
4. Szabályos érmével dobunk addig, amíg elő nem fordul az FFI dobássorozat. Számítsuk ki az ehhez szükséges dobások számának várható értékét! (10 pont)
5. Egy szabályos dobókockát kilencvenszer feldobunk. Jelölje X, hogy ezalatt hányszor fordult elő, hogy kettest vagy négyest dobtunk. Mennyi X várható értéke, és mennyi a szórása? (10 pont)
6. Válasszunk egy pontot a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlással. Adjuk meg a kiválasztott pont $\frac{4}{5}$-től mért távolságának eloszlásfüggvényét. (10 pont)

A megoldásokat indokolni kell, a teljes pontszám eléréséhez helyes indoklás és jó végeredmény is szükséges.

A dolgozaton összesen 60 pontot lehet szerezni, minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 20 pont, aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a december 8-i gyakorlaton pótolhatja a dolgozatot. Aki mindkétszer elért legalább 20 pontot, ugyanekkor írhat javító dolgozatot valamelyik témakörből, itt rontani nem lehet.

A ponthatárok összesen: 40, 60, 80, 100. Az eredmények és az ez alapján ajánlott érdemjegyek az ETR infosheet rovatában lesznek olvahatók. Aki ezeket e-mailben is meg szeretné kapni, írja rá a dolgozatára az e-mail címét.

A feladatok megoldásai a http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak címen lesznek elérhetők.

Valószínűségszámítás **2. zárthelyi dolgozat** **2008. december 1.**

C csoport

1. Szabályos érmével dobunk az FIF sorozat első megjelenéséig. Számítsuk ki a szükséges dobások számának várható értékét! (10 pont)
2. Egy szabályos dobókockát negyvenötször feldobunk. Számítsuk ki a dobott hatosok számának várható értékét és szórását! (10 pont)
3. Válasszunk egy pontot a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlással. Adjuk meg a kiválasztott pont $\frac{1}{4}$-től mért távolságának eloszlásfüggvényét. (10 pont)
4. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, Poisson-eloszlásúak, paraméterük rendre 2 és 5. Számítsuk ki $D(X + Y)$-t és $R(Y, X + Y)$-t. (5+5 pont)
5. Egy zsákban hat golyó van, melyek kívülről megkülönböztethetetlenek. Kettőre kettes, kettőre négyes, kettőre hatos van írva. A zsákból kétszer húzunk visszatevéssel. Számítsuk ki a két kihúzott szám maximumának várható értékét! (10 pont)
6. Egy izzó élettartamának sűrűségfüggvénye az időt években mérve: $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$, ha $x > 0$, és $f(x) = 0$ különben. Mennyi a valószínűsége, hogy az izzó működésének második évében romlik el? Mennyi az izzó várható élettartama? (5+5 pont)

A megoldásokat indokolni kell, a teljes pontszám eléréséhez helyes indoklás és jó végeredmény is szükséges.

A dolgozaton összesen 60 pontot lehet szerezni, minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 20 pont, aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a december 8-i gyakorlaton pótolhatja a dolgozatot. Aki mindkétszer elért legalább 20 pontot, ugyanekkor írhat javító dolgozatot valamelyik témakörből, itt rontani nem lehet.

A ponthatárok összesen: 40, 60, 80, 100. Az eredmények és az ez alapján ajánlott érdemjegyek az ETR infosheet rovatában lesznek olvahatók. Aki ezeket e-mailben is meg szeretné kapni, írja rá a dolgozatára az e-mail címét.

A feladatok megoldásai a http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak címen lesznek elérhetők.

Valószínűségszámítás **2. zárthelyi dolgozat, megoldások** **2008. december 1.**

A csoport

1. Egy szabályos dobókocka oldalain két egyes, két kettes és két négyes áll. Kétszer dobunk egymás után. Számítsuk ki a két dobott szám minimumának várható értékét. (10 pont)
Jelölje X az elsőként, Y a másodikként dobott számot, Z a minimumot. Felhasználva, hogy X és Y függetlenek, megkaphatjuk Z eloszlását:

$$P(Z=4) = P(X=4, Y=4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$
$$P(Z=2) = P(X=2, Y=2) + P(X=2, Y=4) + P(X=4, Y=2) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$
$$P(Z=1) = 1 - P(Z=4) - P(Z=2) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9}.$$

Így a várható érték definíciója alapján:

$$E(Z) = 1 \cdot P(Z=1) + 2 \cdot P(Z=2) + 4 \cdot P(Z=4) = \frac{5}{9} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{5}{3} \approx 1,67.$$

2. Válasszunk egy pontot a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlással. Adjuk meg a kiválasztott pont $\frac{1}{3}$-tól mért távolságának eloszlásfüggvényét. (10 pont)
Jelöje U a kiválasztott pontot, X az $\frac{1}{3}$-tól mért távolságát. Mivel $0 \le U \le 1$, $0 \le X \le \frac{2}{3}$. Emiatt $t \le 0$ esetén $F(X) = 0$, $t \ge \frac{2}{3}$ esetén $F(X) = 1$. Ha $0 < t \le \frac{1}{3}$, akkor mivel az $\frac{1}{3}$-hoz t-nél közelebb eső pontok az $\left(\frac{1}{3} - t, \frac{1}{3} + t\right)$ intervallumon helyezhednek el, és U egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon:

$$F(t) = P(X < t) = P\left(\left|U - \frac{1}{3}\right| < t\right) = P\left(\frac{1}{3} - t < U < \frac{1}{3} + t\right) = 2t,$$

hiszen a megfelelő intervallum hossza $2t$. Ha pedig $\frac{1}{3} < t \le \frac{2}{3}$, akkor a $(0,1)$ intervallumban $\frac{1}{3}$-hoz t-nél közelebb eső pontok a $\left(0, \frac{1}{3} + t\right)$ intervallumon helyezkednek el, hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$F(t) = P(X < t) = P\left(\left|U - \frac{1}{3}\right| < t\right) = P\left(0 < U < \frac{1}{3} + t\right) = \frac{1}{3} + t.$$

Összefoglalva,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0, \\ 2t, & \text{ha } 0 < t \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3} + t, & \text{ha } \frac{1}{3} < t \le \frac{2}{3}, \\ 1, & \text{ha } \frac{2}{3} < t. \end{cases}$$

3. Egy szabályos érmével dobunk addig, amíg először nem jelenik meg az IFF sorozat. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke? (10 pont)
Négy állapotot különböztetünk meg a dobások során. Legyen i_1 az az állapot, ha az eddigi sorozat írásra végződik, i_2, ha az eddigi sorozat IF-re végződik, i_3 a játék vége, amikor a dobássorozat IFF-re végződik, i_0 az összes többi eset. Az üres dobássorozat is ide tartozik, a játék i_0-ból indul. Jelölje L_j, hogy az i_j állapotból indulva mennyi a játék befejeződéséhez szükséges dobások számának várható értéke ($j = 0, 1, 2, 3$). Világos, hogy $L_3 = 0$. A többi

állapotban a teljes várható érték tételét alkalmazva aszerint, hogy az újabb dobás fej vagy írás, és ezáltal melyik állapotba kerül a játék:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot L_0 + \frac{1}{2} \cdot L_1, \\ L_1 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot L_2 + \frac{1}{2} \cdot L_1, \\ L_2 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot L_1. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $L_0 = 8,\ L_1 = 6,\ L_2 = 4$. A játék i_0-ból indul, így hosszának várható értéke $L_0 = 8$. Tehát az IFF sorozat első megjelenéséhez szükséges dobások számának várható értéke 8.

4. Egy zsákban négy egyforma golyó van, egytől négyig megszámozva. Hatvanszor húzunk egymás után visszatevéssel. Jelölje X, hogy ezalatt hányszor húztuk ki a hármas számú golyót. Számítsuk ki X várható értékét és szórását! (10 pont)
Mivel visszatevéssel húzunk, az egyes húzások egymástól függetlenek. Minden alkalommal $\frac{1}{4}$ valószínűséggel húzzuk a hármas számú golyót, és X jelöli, hogy 60 húzás alatt ez hányszor következik be. Ezekből következik, hogy X binomiális eloszlású $n = 60$ és $p = \frac{1}{4}$ paraméterekkel. Így az ismert formulák alapján:

$$\begin{aligned} E(X) &= n \cdot p = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15, \\ D(X) &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{60 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} \approx 3,35. \end{aligned}$$

5. Egy mosógép élettartamának sűrűségfüggvénye az időt években mérve: $f(x) = \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x}$, ha $x > 0$, és $f(x) = 0$ különben. Mennyi a valószínűsége, hogy a mosógép működésének tizedik évében romlik el? Mennyi a mosógép várható élettartama? (5+5 pont)
Jelöljük a mosógép élettartamát években mérve X-szel. A definíciók alapján számolva

$$\begin{aligned} P(9 \le X < 10) &= P(X < 10) - P(X < 9) = F_X(10) - F_X(9) = \\ &= \int_{-\infty}^{10} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{9} f(x)\,dx = \int_{9}^{10} f(x)\,dx = \\ &= \int_{9}^{10} \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{20}x} \right]_{x=9}^{10} = e^{-\frac{1}{20}\cdot 9} - e^{-\frac{1}{20}\cdot 10} \approx 0,0311. \end{aligned}$$

A várható érték kiszámításához vegyük észre, hogy X exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{20}$ paraméterrel, így az élettartam várható értéke években mérve $\frac{1}{\lambda} = 20$.

6. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, Poisson-eloszlásúak, paraméterük rendre 3 és 5. Számítsuk ki $D(X+Y)$-t és $R(X+Y, Y)$-t. (5+5 pont)
Felhasználva a két változó függetlenségét: $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$. Ugyanakkor ismert, hogy λ paraméterű, Poisson-eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete λ, ezért:

$$D(X+Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)} = \sqrt{3+5} = \sqrt{8} \approx 2,83.$$

A kovariancia bilinearitása miatt $cov(X+Y, Y) = cov(X, Y) + cov(Y, Y)$. A függetlenségből következik, hogy az első tag 0, a második tag pedig Y szórásnégyzete, azaz 5. Ezek alapján

$$R(X+Y, Y) = \frac{cov(X+Y, Y)}{D(X+Y) \cdot D(Y)} = \frac{D^2(Y)}{D(X+Y) \cdot D(Y)} = \frac{D(Y)}{D(X+Y)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} \approx 0,79.$$

Valószínűségszámítás **2. zárthelyi dolgozat, megoldások** **2008. december 1.**

B csoport

1. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, Poisson-eloszlásúak, paraméterük rendre 4 és 6. Számítsuk ki $D(X+Y)$-t és $R(X, X+Y)$-t. (5+5 pont)
Felhasználva a két változó függetlenségét: $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$. Ugyanakkor ismert, hogy λ paraméterű, Poisson-eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete λ, ezért:
$$D(X+Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)} = \sqrt{4+6} = \sqrt{10} \approx 3,16.$$
A kovariancia bilinearitása miatt $cov(X, X+Y) = cov(X, X) + cov(X, Y)$. A függetlenségből következik, hogy a második tag 0, az első tag pedig Y szórásnégyzete, azaz 6. Ezek alapján
$$R(X, X+Y) = \frac{cov(X, X+Y)}{D(X) \cdot D(X+Y)} = \frac{D^2(X)}{D(X) \cdot D(X+Y)} = \frac{D(X)}{D(X+Y)} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{10}} \approx 0,63.$$

2. Egy kalapban hat egyforma cédula van, kettőre kettes, kettőre hármas, kettőre négyes van írva. Kétszer húzunk visszatevéssel. Mennyi a két húzott szám maximumának várható értéke? (10 pont)
Jelölje X az elsőként, Y a másodikként húzott számot, Z a maximumot. Felhasználva, hogy X és Y függetlenek, megkaphatjuk Z eloszlását:
$$P(Z=2) = P(X=2, Y=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$
$$P(Z=3) = P(X=3, Y=3) + P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$
$$P(Z=4) = 1 - P(Z=2) - P(Z=3) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9}.$$
Így a várható érték definíciója alapján:
$$E(Z) = 2 \cdot P(Z=2) + 3 \cdot P(Z=3) + 4 \cdot P(Z=4) = \frac{2}{9} + 1 + \frac{20}{9} = \frac{31}{9} \approx 3,44.$$

3. Egy tartóselem élettartamának sűrűségfüggvénye az időt hónapokban mérve: $f(x) = \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}x}$, ha $x > 0$, és $f(x) = 0$ különben. Mennyi a valószínűsége, hogy az elem működésének tizedik hónapjában romlik el? Mennyi az elem várható élettartama? (5+5 pont)
Jelöljük az elem élettartamát hónapokban mérve X-szel. A definíciók alapján számolva
$$\begin{aligned} P(9 \leq X < 10) &= P(X < 10) - P(X < 9) = F_X(10) - F_X(9) = \\ &= \int_{-\infty}^{10} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{9} f(x)\,dx = \int_{9}^{10} f(x)\,dx = \\ &= \int_{9}^{10} \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{15}x}\right]_{x=9}^{10} = e^{-\frac{1}{15}\cdot 9} - e^{-\frac{1}{15}\cdot 10} \approx 0,0354. \end{aligned}$$
A várható érték kiszámításához vegyük észre, hogy X exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{15}$ paraméterrel, így az élettartam várható értéke hónapokban mérve $\frac{1}{\lambda} = 15$.

4. Szabályos érmével dobunk addig, amíg elő nem fordul az FFI dobássorozat. Számítsuk ki az ehhez szükséges dobások számának várható értékét! (10 pont)
Négy állapotot különböztetünk meg a dobások során. Legyen i_1 az az állapot, ha az eddigi

sorozat egy fejre végződik, i_2, ha az eddigi sorozat FF-re végződik, i_3 a játék vége, amikor a dobássorozat FFI-re végződik, i_0 az összes többi eset. Az üres dobássorozat is ide tartozik, a játék i_0-ból indul. Jelölje L_j, hogy az i_j állapotból indulva mennyi a játék befejeződéséhez szükséges dobások számának várható értéke ($j = 0, 1, 2, 3$). Világos, hogy $L_3 = 0$. A többi állapotban a teljes várható érték tételét alkalmazva aszerint, hogy az újabb dobás fej vagy írás, és ezáltal melyik állapotba kerül a játék:

$$\begin{aligned}
L_0 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot L_1 + \frac{1}{2} \cdot L_0, \\
L_1 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot L_2 + \frac{1}{2} \cdot L_0, \\
L_2 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot L_2 + \frac{1}{2} \cdot 0.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $L_0 = 8,\ L_1 = 6,\ L_2 = 2$. A játék i_0-ból indul, így hosszának várható értéke $L_0 = 8$. Tehát az FFI sorozat első megjelenéséhez szükséges dobások számának várható értéke 8.

5. Egy szabályos dobókockát kilencvenszer feldobunk. Jelölje X, hogy ezalatt hányszor fordult elő, hogy kettest vagy négyest dobtunk. Mennyi X várható értéke, és mennyi a szórása? (10 pont)
Az egyes dobások egymástól függetlenek. Minden alkalommal $\frac{1}{3}$ valószínűséggel dobunk kettest vagy négyest, és X jelöli, hogy 90 húzás alatt ez hányszor következik be. Ezekből következik, hogy X binomiális eloszlású $n = 90$ és $p = \frac{1}{3}$ paraméterekkel. Így az ismert formulák alapján:

$$\begin{aligned}
E\left(X\right) &= n \cdot p = 90 \cdot \frac{1}{3} = 30, \\
D\left(X\right) &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{20} \approx 4,47.
\end{aligned}$$

6. Válasszunk egy pontot a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlással. Adjuk meg a kiválasztott pont $\frac{4}{5}$-től mért távolságának eloszlásfüggvényét. (10 pont)
Jelöje U a kiválasztott pontot, X az $\frac{4}{5}$-től mért távolságát. Mivel $0 \leq U \leq 1$, $0 \leq X \leq \frac{4}{5}$. Emiatt $t \leq 0$ esetén $F(X) = 0$, $t \geq \frac{4}{5}$ esetén $F(X) = 1$. Ha $0 < t \leq \frac{1}{5}$, akkor mivel az $\frac{4}{5}$-höz t-nél közelebb eső pontok az $\left(\frac{4}{5} - t, \frac{4}{5} + t\right)$ intervallumon helyezhednek el, és U egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon:

$$F(t) = P(X < t) = P\left(\left|U - \frac{4}{5}\right| < t\right) = P\left(\frac{4}{5} - t < U < \frac{4}{5} + t\right) = 2t,$$

hiszen a megfelelő intervallum hossza $2t$. Ha pedig $\frac{1}{5} < t \leq \frac{4}{5}$, akkor a $(0,1)$ intervallumban $\frac{4}{5}$-höz t-nél közelebb eső pontok a $\left(\frac{4}{5} - t, 1\right)$ intervallumon helyezkednek el, hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$F(t) = P(X < t) = P\left(\left|U - \frac{4}{5}\right| < t\right) = P\left(\frac{4}{5} - t < U < 1\right) = \frac{1}{5} + t.$$

Összefoglalva,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0, \\ 2t, & \text{ha } 0 < t \leq \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{5} + t, & \text{ha } \frac{1}{5} < t \leq \frac{4}{5}, \\ 1, & \text{ha } \frac{4}{5} < t. \end{cases}$$

1. Szabályos érmével dobunk az FIF sorozat első megjelenéséig. Számítsuk ki a szükséges dobások számának várható értékét! (10 pont)
Négy állapotot különböztetünk meg a dobások során. Legyen i_1 az az állapot, ha az eddigi sorozat fejre végződik, i_2, ha az eddigi sorozat FI-re végződik, i_3 a játék vége, amikor a dobássorozat FIF-re végződik, i_0 az összes többi eset. Az üres dobássorozat is ide tartozik, a játék i_0-ból indul. Jelölje L_j, hogy az i_j állapotból indulva mennyi a játék befejeződéséhez szükséges dobások számának várható értéke $(j = 0, 1, 2, 3)$. Világos, hogy $L_3 = 0$. A többi állapotban a teljes várható érték tételét alkalmazva aszerint, hogy az újabb dobás fej vagy írás, és ezáltal melyik állapotba kerül a játék:
$$L_0 = 1 + \frac{1}{2} \cdot L_1 + \frac{1}{2} \cdot L_0,$$
$$L_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot L_1 + \frac{1}{2} \cdot L_2,$$
$$L_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot L_0.$$
Az egyenletrendszer megoldása: $L_0 = 10,\ L_1 = 8,\ L_2 = 6$. A játék i_0-ból indul, így hosszának várható értéke $L_0 = 10$. Tehát az FIF sorozat első megjelenéséhez szükséges dobások számának várható értéke 10.

2. Egy szabályos dobókockát negyvenötször feldobunk. Számítsuk ki a dobott hatosok számának várható értékét és szórását! (10 pont)
Az egyes dobások egymástól függetlenek. Minden alkalommal $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dobunk hatost, és X jelöli, hogy 45 húzás alatt ez hányszor következik be. Ezekből következik, hogy X binomiális eloszlású $n = 45$ és $p = \frac{1}{6}$ paraméterekkel. Így az ismert formulák alapján:
$$E(X) = n \cdot p = 45 \cdot \frac{1}{6} = 7,5,$$
$$D(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{45 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = 2,5.$$

3. Válasszunk egy pontot a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlással. Adjuk meg a kiválasztott pont $\frac{1}{4}$-től mért távolságának eloszlásfüggvényét. (10 pont)
Jelöje U a kiválasztott pontot, X az $\frac{1}{4}$-től mért távolságát. Mivel $0 \leq U \leq 1$, $0 \leq X \leq \frac{3}{4}$. Emiatt $t \leq 0$ esetén $F(X) = 0$, $t \geq \frac{3}{4}$ esetén $F(X) = 1$. Ha $0 < t \leq \frac{1}{4}$, akkor mivel az $\frac{1}{4}$-hez t-nél közelebb eső pontok az $\left(\frac{1}{4} - t, \frac{1}{4} + t\right)$ intervallumon helyezhednek el, és U egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon:
$$F(t) = P(X < t) = P\left(\left|U - \frac{1}{4}\right| < t\right) = P\left(\frac{1}{4} - t < U < \frac{1}{4} + t\right) = 2t,$$
hiszen a megfelelő intervallum hossza $2t$. Ha pedig $\frac{1}{4} < t \leq \frac{3}{4}$, akkor a $(0, 1)$ intervallumban $\frac{1}{4}$-hez t-nél közelebb eső pontok a $\left(0, \frac{1}{4} + t\right)$ intervallumon helyezkednek el, hasonlóképpen kapjuk, hogy
$$F(t) = P(X < t) = P\left(\left|U - \frac{1}{4}\right| < t\right) = P\left(0 < U < \frac{1}{4} + t\right) = \frac{1}{4} + t.$$
Összefoglalva,
$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0, \\ 2t, & \text{ha } 0 < t \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} + t, & \text{ha } \frac{1}{4} < t \leq \frac{3}{4}, \\ 1, & \text{ha } \frac{3}{4} < t. \end{cases}$$

4. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, Poisson-eloszlásúak, paraméterük rendre 2 és 5. Számítsuk ki $D(X+Y)$-t és $R(Y, X+Y)$-t. (5+5 pont)
Felhasználva a két változó függetlenségét: $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$. Ugyanakkor ismert, hogy λ paraméterű, Poisson-eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete λ, ezért:

$$D(X+Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)} = \sqrt{2+5} = \sqrt{7} \approx 2,65.$$

A kovariancia bilinearitása miatt $cov(Y, X+Y) = cov(Y, X) + cov(Y, Y)$. A függetlenségből következik, hogy az első tag 0, a második tag pedig Y szórásnégyzete, azaz 5. Ezek alapján

$$R(Y, X+Y) = \frac{cov(Y, X+Y)}{D(Y) \cdot D(X+Y)} = \frac{D^2(Y)}{D(Y) \cdot D(X+Y)} = \frac{D(Y)}{D(X+Y)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \approx 0,85.$$

5. Egy zsákban hat golyó van, melyek kívülről megkülönböztethetetlenek. Kettőre kettes, kettőre négyes, kettőre hatos van írva. A zsákból kétszer húzunk visszatevéssel. Számítsuk ki a két kihúzott szám maximumának várható értékét! (10 pont)
Jelölje X az elsőként, Y a másodikként húzott számot, Z a maximumot. Felhasználva, hogy X és Y függetlenek, megkaphatjuk Z eloszlását:

$$P(Z=2) = P(X=2, Y=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$
$$P(Z=4) = P(X=4, Y=4) + P(X=2, Y=4) + P(X=4, Y=2) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$
$$P(Z=6) = 1 - P(Z=2) - P(Z=4) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9}.$$

Így a várható érték definíciója alapján:

$$E(Z) = 2 \cdot P(Z=2) + 4 \cdot P(Z=4) + 6 \cdot P(Z=6) = \frac{2}{9} + \frac{12}{9} + \frac{30}{9} = \frac{44}{9} \approx 4,89.$$

6. Egy izzó élettartamának sűrűségfüggvénye az időt években mérve: $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$, ha $x > 0$, és $f(x) = 0$ különben. Mennyi a valószínűsége, hogy az izzó működésének második évében romlik el? Mennyi az izzó várható élettartama? (5+5 pont)
Jelöljük az izzó élettartamát hónapokban mérve X-szel. A definíciók alapján számolva

$$\begin{aligned} P(1 \leq X < 2) &= P(X < 2) - P(X < 1) = F_X(2) - F_X(1) = \\ &= \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = \int_{1}^{2} f(x)\,dx = \\ &= \int_{1}^{2} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{4}x}\right]_{x=1}^{2} = e^{-\frac{1}{4}\cdot 1} - e^{-\frac{1}{4}\cdot 2} \approx 0,1723. \end{aligned}$$

A várható érték kiszámításához vegyük észre, hogy X exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{4}$ paraméterrel, így az élettartam várható értéke években mérve $\frac{1}{\lambda} = 4$.