Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** **2008. október 20.**

A csoport

1. Egy urnában n darab cédula van, 1-től n-ig számozva. $2n$-szer húzunk visszatevéssel, a húzások egymástól függetlenek, és minden alkalommal minden cédulát egyforma valószínűséggel húzunk ki. Mennyi a valószínűsége, hogy minden cédulát legalább egyszer kihúzunk? (10 pont)

2. Egy szabályos hatoldalú dobókockával dobunk ötször egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy
   a) minden dobás különböző? (5 pont)
   b) az első és az utolsó dobás egyforma, de más egyezés nincs a dobások között? (5 pont)

3. Egy 52 lapos franciakártya-csomagból visszatevés nélkül kihúzunk véletlenszerűen 4 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy
   a) csupa egyforma színű lapot húzunk? (5 pont)
   b) pontosan három fekete lapot húzunk? (5 pont)
   (A franciakártyában négy szín van, treff, káró, kőr, és pikk. Minden színből ugyanannyi lap van a pakliban. A színek közül tartozik a piros színekhez, kettő a feketékhez.)

4. Feldobunk egy szabályos érmét, ha fej, akkor még egyszer dobunk, ha írás, akkor még kétszer. Jelölje A és B az alábbi eseményeket: A: a második dobás írás; B: háromszor dobunk, és a harmadik dobás fej. Független-e egymástól A és B? (10 pont)

5. Egy zsákban két pénzérme van, melyek kívülről megkülönböztethetetlenek. Az egyik szabályos, a másikkal azonban $\frac{1}{3}$ a fej és $\frac{2}{3}$ az írás valószínűsége. Kihúzunk véletlenszerűen egy érmét, és addig dobunk, míg fejet nem kapunk.
   a) Jelölje X, hogy hányadik dobásnál jön ki először fej. Adjuk meg X eloszlását! (10 pont)
   b) Feltéve, hogy a harmadik dobásnál kaptuk az első fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét húztuk ki? (10 pont)

A feladatokért kapható pontszámok a feladat szövege mellett láthatók. A megoldásokat indokolni kell, a teljes pontszám eléréséhez helyes indoklás és jó végeredmény is szükséges.
Összesen 60 pontot lehet szerezni. Az elégséges ponthatára 20 pont, aki ezt nem éri el, vagy a dolgozatot nem írja meg, a december 8-i gyakorlaton pótolhatja a dolgozatot. Javító zh-t ugyanekkor írhat, aki mindkét zh-n legalább elégségest ért el. A második zh-n is 60 pont érhető el, a ponthatárok összességében: 40, 60, 80, 100.
Az elért pontszámokat az ETR infosheet rovatában lehet majd megnézni.
A 6. feladatsor 10-15. feladatai szorgalmi feladatok, ezeket november 3-ig lehet beadni.

Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** **2008. október 20.**

B csoport

1. Feldobunk egy szabályos érmét, ha fej, akkor még egyszer dobunk, ha írás, akkor még kétszer. Jelölje A és B az alábbi eseményeket: A: az első két dobás különböző; B: háromszor dobunk, és a harmadik dobás fej. Független-e egymástól A és B? (10 pont)

2. Egy 32 lapos magyarkártya-csomagból visszatevés nélkül kihúzunk véletlenszerűen 5 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy
   a) csupa egyforma színű lapot húzunk? (5 pont)
   b) pontosan két zöld lapot húzunk? (5 pont)
   (A magyarkártyában négy szín van, piros, zöld, tök és makk. Minden színből ugyanannyi lap van a pakliban.)

3. Egy zsákban n darab golyó van, 1-től n-ig számozva. $3n$-szer húzunk visszatevéssel, a húzások egymástól függetlenek, és minden alkalommal minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Mennyi a valószínűsége, hogy minden golyót legalább egyszer kihúzunk? (10 pont)

4. Egy szabályos hatoldalú dobókockával dobunk ötször egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy
   a) minden dobás különböző? (5 pont)
   b) az utolsó két dobás egyforma, de más egyezés nincs a dobások között? (5 pont)

5. Egy zsákban két pénzérme van, melyek kívülről megkülönböztethetetlenek. Az egyik szabályos, a másikkal azonban $\frac{1}{3}$ az írás és $\frac{2}{3}$ a fej valószínűsége. Kihúzunk véletlenszerűen egy érmét, és addig dobunk, míg fejet nem kapunk.
   a) Jelölje X, hogy hányadik dobásnál jön ki először fej. Adjuk meg X eloszlását! (10 pont)
   b) Feltéve, hogy a harmadik dobásnál kaptuk az első fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét húztuk ki? (10 pont)

A feladatokért kapható pontszámok a feladat szövege mellett láthatók. A megoldásokat indokolni kell, a teljes pontszám eléréséhez helyes indoklás és jó végeredmény is szükséges.
Összesen 60 pontot lehet szerezni. Az elégséges ponthatára 20 pont, aki ezt nem éri el, vagy a dolgozatot nem írja meg, a december 8-i gyakorlaton pótolhatja a dolgozatot. Javító zh-t ugyanekkor írhat, aki mindkét zh-n legalább elégségest ért el. A második zh-n is 60 pont érhető el, a ponthatárok összességében: 40, 60, 80, 100.
Az elért pontszámokat az ETR infosheet rovatában lehet majd megnézni.
A 6. feladatsor 10-15. feladatai szorgalmi feladatok, ezeket november 3-ig lehet beadni.

Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** **2008. október 20.**

C csoport

1. Egy 52 lapos franciakártya-csomagból visszatevés nélkül kihúzunk véletlenszerűen 5 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy
a) csupa egyforma színű lapot húzunk? (5 pont)
b) pontosan két fekete lapot húzunk? (5 pont)
(A franciakártyában négy szín van, treff, káró, kőr, és pikk. Minden színből ugyanannyi lap van a pakliban. A színek közül tartozik a piros színekhez, kettő a feketékhez.)

2. Egy szabályos hatoldalú dobókockával dobunk ötször egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy
a) minden dobás különböző? (5 pont)
b) az első és az utolsó dobás egyforma, de más egyezés nincs a dobások között? (5 pont)

3. Feldobunk egy szabályos érmét, ha írás, akkor még egyszer dobunk, ha fej, akkor még kétszer. Jelölje A és B az alábbi eseményeket: A: a második dobás fej; B: háromszor dobunk, és a harmadik dobás fej. Független-e egymástól A és B? (10 pont)

4. Egy urnában n darab cédula van, 1-től n-ig számozva. $2n$-szer húzunk visszatevéssel, a húzások egymástól függetlenek, és minden alkalommal minden cédulát egyforma valószínűséggel húzunk ki. Mennyi a valószínűsége, hogy minden cédulát legalább egyszer kihúzunk? (10 pont)

5. Egy zsákban két pénzérme van, melyek kívülről megkülönböztethetetlenek. Az egyik szabályos, a másikkal azonban $\frac{1}{3}$ a fej és $\frac{2}{3}$ az írás valószínűsége. Kihúzunk véletlenszerűen egy érmét, és addig dobunk, míg fejet nem kapunk.
a) Jelölje X, hogy hányadik dobásnál jön ki először fej. Adjuk meg X eloszlását! (10 pont)
b) Feltéve, hogy a harmadik dobásnál kaptuk az első fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét húztuk ki? (10 pont)

A feladatokért kapható pontszámok a feladat szövege mellett láthatók. A megoldásokat indokolni kell, a teljes pontszám eléréséhez helyes indoklás és jó végeredmény is szükséges.
Összesen 60 pontot lehet szerezni. Az elégséges ponthatára 20 pont, aki ezt nem éri el, vagy a dolgozatot nem írja meg, a december 8-i gyakorlaton pótolhatja a dolgozatot. Javító zh-t ugyanekkor írhat, aki mindkét zh-n legalább elégségest ért el. A második zh-n is 60 pont érhető el, a ponthatárok összességében: 40, 60, 80, 100.
Az elért pontszámokat az ETR infosheet rovatában lehet majd megnézni.
A 6. feladatsor 10-15. feladatai szorgalmi feladatok, ezeket november 3-ig lehet beadni.

Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** **2008. október 20.**

D csoport

1. Egy szabályos hatoldalú dobókockával dobunk ötször egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy
   a) minden dobás különböző? (5 pont)
   b) az utolsó két dobás egyforma, de más egyezés nincs a dobások között? (5 pont)

2. Egy 32 lapos magyarkártya-csomagból visszatevés nélkül kihúzunk véletlenszerűen 4 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy
   a) csupa egyforma színű lapot húzunk? (5 pont)
   b) pontosan három piros lapot húzunk? (5 pont)
   (A magyarkártyában négy szín van, piros, zöld, tök és makk. Minden színből ugyanannyi lap van a pakliban.)

3. Egy zsákban n darab golyó van, 1-től n-ig számozva. $3n$-szer húzunk visszatevéssel, a húzások egymástól függetlenek, és minden alkalommal minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Mennyi a valószínűsége, hogy minden golyót legalább egyszer kihúzunk? (10 pont)

4. Feldobunk egy szabályos érmét, ha fej, akkor még egyszer dobunk, ha írás, akkor még kétszer. Jelölje A és B az alábbi eseményeket: A: az első két dobás különböző; B: háromszor dobunk, és a harmadik dobás fej. Független-e egymástól A és B? (10 pont)

5. Egy zsákban két pénzérme van, melyek kívülről megkülönböztethetetlenek. Az egyik szabályos, a másikkal azonban $\frac{1}{3}$ az írás és $\frac{2}{3}$ a fej valószínűsége. Kihúzunk véletlenszerűen egy érmét, és addig dobunk, míg fejet nem kapunk.
   a) Jelölje X, hogy hányadik dobásnál jön ki először fej. Adjuk meg X eloszlását! (10 pont)
   b) Feltéve, hogy a harmadik dobásnál kaptuk az első fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét húztuk ki? (10 pont)

A feladatokért kapható pontszámok a feladat szövege mellett láthatók. A megoldásokat indokolni kell, a teljes pontszám eléréséhez helyes indoklás és jó végeredmény is szükséges.
Összesen 60 pontot lehet szerezni. Az elégséges ponthatára 20 pont, aki ezt nem éri el, vagy a dolgozatot nem írja meg, a december 8-i gyakorlaton pótolhatja a dolgozatot. Javító zh-t ugyanekkor írhat, aki mindkét zh-n legalább elégségest ért el. A második zh-n is 60 pont érhető el, a ponthatárok összességében: 40, 60, 80, 100.
Az elért pontszámokat az ETR infosheet rovatában lehet majd megnézni.
A 6. feladatsor 10-15. feladatai szorgalmi feladatok, ezeket november 3-ig lehet beadni.

A csoport, megoldások

1. $i = 1, 2, \ldots n$-re jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i. cédulát egyszer sem húztuk ki. $\bigcup_{i=1}^n A_i$ azt jelenti, hogy valamelyik cédulát egyszer sem húztuk ki, ez éppen a kérdéses esemény komplementere. Használjuk a Poincaré-formulát az unió valószínűségének kiszámítására:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_n\le n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}\right).$$

$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}$ valószínűsége $\left(\frac{n-j}{n}\right)^{2n}$, hiszen mind a $2n$ húzás során n-féle cédulát kaphatunk, így n^{2n} húzás van összesen. A feladat feltételeiből következik, hogy ezek egyformán valószínűek. A metszethez tartozó húzásoknál az $i_1, \ldots i_j$ cédulák nem szerepelhetnek, így mind a $2n$ húzás során $n-j$-féle cédulát kaphatunk, így $(n-j)^{2n}$ húzás felel meg a feltételeknek, ebből adódik a metszet valószínűsége. A belső összeg tagjai tehát egyenlők, a tagok száma pedig $\binom{n}{j}$, hiszen ennyiféleképpen választhatunk ki az n lehetséges index közül j darab különbözőt. Mindezeket összevetve a kérdéses valószínűség:

$$1 - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \left(\frac{n-j}{n}\right)^{2n} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left(1-\frac{j}{n}\right)^{2n}.$$

2. Minden dobás hatféle lehet, így az öt dobás során összesen 6^5-féle dobássorozat fordulhat elő. Mivel a dobókocka szabályos, ezek egyformán valószínűek. Így mindkét feladatban megtehetjük, hogy a megfelelő dobássorozatok számát osztjuk az összes dobássorozat számával, és így kapjuk a kérdéses valószínűséget.
a) Ha minden dobás különböző, az első dobás hatféle lehet. Bármi is az első dobás értéke, a második dobás bármilyen ettől különböző érték lehet, azaz ötféle, így az első két dobás $6 \cdot 5$-féle lehet. Bármilyen az első két dobás, a harmadik tetszőleges ezektől különböző lehet, azaz négyféle. Így az első három dobás $6 \cdot 5 \cdot 4$-féle lehet. Így folytatva az ötödik dobásig, a kérdéses valószínűség:
$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} \approx 0,0926.$$
b) Ha az első és az utolsó dobás egyforma, de más egyezés nincs a dobások között, az első részhez hasonló gondolatmenettel az első dobás hatféle lehet, a második ötféle, a harmadik négyféle, a negyedik háromféle, az utolsó, mely az elsővel megegyezik, egyféle. Így a kérdéses valószínűség:
$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} \approx 0,0463.$$

3. Az 52 lapból visszatevés nélkül négyet kihúzni $\binom{52}{4}$-féleképpen lehet, szimmetria miatt a húzások egyformán valószínűek. Így mindkét feladatban megtehetjük, hogy a megfelelő húzások számát osztjuk az összes húzás számával.
a) Csupa egyforma színű lapot húzni négyféleképpen lehetséges: csak treff, káró, kőr, illetve pikk lapokat húzunk. Minden színből 13 lap van a pakliban, így egy adott színből $\binom{13}{4}$-féleképpen választhatunk ki négy lapot, ennyi a megfelelő húzások száma. Tehát annak valószínűsége, hogy csupa egyforma színű lapot húzunk:
$$4 \cdot \frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} \approx 0,01.$$

b) Azt kell megszámolni, hogy hány olyan húzás van, amelyben 3 fekete és 1 piros lap van. A 26 fekete lapból $\binom{26}{3}$-féleképpen válaszhatjuk ki, hogy melyik három kerüljön a kihúzottak közé. Szintén 26 piros lap van, ebből 26-féleképpen választhatunk ki egyet. Bárhogyan választottuk a kihúzott fekete lapokat, bármelyik piros lap melléjük kerülhet, ezért a húzások számához szorozni kell a binomiális együtthatókat. Tehát annak valószínűsége, hogy pontosan három fekete lapot húzunk:

$$\frac{\binom{26}{3} \cdot 26}{\binom{52}{4}} \approx 0,2491.$$

Mivel visszatevés nélkül húzunk, a kihúzott fekete lapok száma hipergeometrikus eloszlású 52, 26, 4 paraméterekkel, ebből is megkapható a fenti képlet.

4. Az eseménytér hatelemű, az elemi események a lehetséges dobássorozatoknak felelnek meg: $\Omega = \{\omega_{FF}, \omega_{FI}, \omega_{IFF}, \omega_{IFI}, \omega_{IIF}, \omega_{III}\}$. Az elemi események valószínűsége rendre $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$, hiszen például annak valószínűsége, hogy mindkét dobás fej, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, mert a dobások függetlenek és az érme szabályos. Ennek alapján számolva:

$$P(A) = P(\{\omega_{FI}, \omega_{IIF}, \omega_{III}\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2};$$

$$P(B) = P(\{\omega_{IIF}, \omega_{IFF}\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4};$$

$$P(A \cap B) = P(\{\omega_{IIF}\}) = \frac{1}{8}.$$

Látható, hogy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, azaz a definíció szerint A és B függetlenek.

5. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a szabályos érmét húztuk, A_2 azt, hogy a szabálytalant. Az érmék megkülönböztethetetlenek, így $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. Másrészt A_1 és A_2 közül mindig pontosan egy következik be, a két esemény teljes eseményrendszert alkot.
a) X azt jelöli, hogy hányadik dobásnál kaptuk az első fejet, így X lehetséges értékei: $k = 1, 2, \ldots$. Legyen tehát k egy tetszőleges lehetséges érték, és $P(X = k)$ kiszámításához használjuk a teljes valószínűség tételét az A_1, A_2 teljes eseményrendszerre vonatkozóan:

$$P(X = k) = P(X = k|A_1) \cdot P(A_1) + P(X = k|A_2) \cdot P(A_2).$$

$X = k$ azt jelenti, hogy az első $k-1$ dobás írás, a k. pedig fej. A dobások egymástól függetlenek, ezért ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}$, ha a szabályos érmével dobunk, és $\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$, ha a szabálytalan érmével dobunk. Így a teljes valószínűség tételét alkalmazva megkapjuk X eloszlását:

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2 \ldots.$$

b) A kérdés az eddigi jelölésekkel A_1 feltételes valószínűsége a $B = \{X = 3\}$ eseményre vonatkozóan. Alkalmazhatjuk Bayes tételét szintén az A_1, A_2 teljes eseményrendszerre, a feltételes valószínűségeket pedig ugyanúgy számíthatjuk ki, mint az *a)* feladatban:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} \approx 0,4576.$$

B csoport, megoldások

1. Az eseménytér hatelemű, az elemi események a lehetséges dobássorozatoknak felelnek meg: $\Omega = \{\omega_{FF}, \omega_{FI}, \omega_{IFF}, \omega_{IFI}, \omega_{IIF}, \omega_{III}\}$. Az elemi események valószínűsége rendre $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$, hiszen például annak valószínűsége, hogy mindkét dobás fej, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, mert a dobások függetlenek és az érme szabályos. Ennek alapján számolva:

$$P(A) = P(\{\omega_{FI}, \omega_{IFI}, \omega_{IFF}\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2};$$

$$P(B) = P(\{\omega_{IIF}, \omega_{IFF}\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4};$$

$$P(A \cap B) = P(\{\omega_{IFF}\}) = \frac{1}{8}.$$

Látható, hogy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, azaz a definíció szerint A és B függetlenek.

2. A 32 lapból visszatevés nélkül ötöt kihúzni $\binom{32}{5}$-féleképpen lehet, szimmetria miatt a húzások egyformán valószínűek. Így mindkét feladatban megtehetjük, hogy a megfelelő húzások számát osztjuk az összes húzás számával.
a) Csupa egyforma színű lapot húzni négyféleképpen lehetséges: csak zöld, piros, tök, illetve makk lapokat húzunk. Minden színből 8 lap van a pakliban, így egy adott színből $\binom{8}{5}$-féleképpen választhatunk ki öt lapot, ennyi a megfelelő húzások száma. Tehát annak valószínűsége, hogy csupa egyforma színű lapot húzunk:

$$4 \cdot \frac{\binom{8}{5}}{\binom{32}{5}} \approx 0,001.$$

b) Azt kell megszámolni, hogy hány olyan húzás van, amelyben 2 zöld és 3 nem zöld lap van. A 8 zöld lapból $\binom{8}{2}$-féleképpen válaszhatjuk ki, hogy melyik kettő kerüljön a kihúzottak közé. 24 nem zöld lap van, ebből $\binom{24}{3}$-féleképpen választhatunk ki hármat. Bárhogyan választottuk a kihúzott zöld lapokat, bármelyik három nem zöld lap melléjük kerülhet, ezért a húzások számához szorozni kell a binomiális együtthatókat. Tehát annak valószínűsége, hogy pontosan két zöld lapot húzunk:

$$\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{24}{3}}{\binom{32}{5}} \approx 0,2814.$$

Mivel visszatevés nélkül húzunk, a kihúzott zöld lapok száma hipergeometrikus eloszlású 32, 8, 5 paraméterekkel, ebből is megkapható a fenti képlet.

3. $i = 1, 2, \dots n$-re jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i. golyót egyszer sem húztuk ki. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ azt jelenti, hogy valamelyik golyót egyszer sem húztuk ki, ez éppen a kérdéses esemény komplementere. Használjuk a Poincaré-formulát az unió valószínűségének kiszámítására:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_n \le n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}\right).$$

$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}$ valószínűsége $\left(\frac{n-j}{n}\right)^{3n}$, hiszen mind a $3n$ húzás során n-féle golyót kaphatunk, így n^{3n} húzás van összesen. A feladat feltételeiből következik, hogy ezek egyformán valószínűek. A metszethez tartozó húzásoknál az $i_1, \dots i_j$ golyók nem szerepelhetnek, így mind a $3n$ húzás során $n - j$-féle golyót kaphatunk, így $(n-j)^{3n}$ húzás felel meg a feltételeknek, ebből adódik a metszet valószínűsége. A belső összeg tagjai tehát egyenlők, a tagok száma pedig $\binom{n}{j}$, hiszen ennyiféleképpen választhatunk ki az n lehetséges index közül j darab különbözőt. Mindezeket összevetve a kérdéses valószínűség:

$$1-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\binom{n}{j}\left(\frac{n-j}{n}\right)^{3n}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{3n}.$$

4. Minden dobás hatféle lehet, így az öt dobás során összesen 6^5-féle dobássorozat fordulhat elő. Mivel a dobókocka szabályos, ezek egyformán valószínűek. Így mindkét feladatban megtehetjük, hogy a megfelelő dobássorozatok számát osztjuk az összes dobássorozat számával, és így kapjuk a kérdéses valószínűséget.
a) Ha minden dobás különböző, az első dobás hatféle lehet. Bármi is az első dobás értéke, a második dobás bármilyen ettől különböző érték lehet, azaz ötféle, így az első két dobás $6\cdot 5$-féle lehet. Bármilyen az első két dobás, a harmadik tetszőleges ezektől különböző lehet, azaz négyféle. Így az első három dobás $6\cdot 5\cdot 4$-féle lehet. Így folytatva az ötödik dobásig, a kérdéses valószínűség:
$$\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6^5}\approx 0,0926.$$
b) Ha az utolsó két dobás egyforma, de más egyezés nincs a dobások között, az első részhez hasonló gondolatmenettel az első dobás hatféle lehet, a második ötféle, a harmadik négyféle, a negyedik háromféle, az utolsó, mely a negyedikkel megegyezik, egyféle. Így a kérdéses valószínűség:
$$\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^5}\approx 0,0463.$$

5. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a szabályos érmét húztuk, A_2 azt, hogy a szabálytalant. Az érmék megkülönböztethetetlenek, így $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$. Másrészt A_1 és A_2 közül mindig pontosan egy következik be, a két esemény teljes eseményrendszert alkot.
a) X azt jelöli, hogy hányadik dobásnál kaptuk az első fejet, így X lehetséges értékei: $k=1,2,\ldots$. Legyen tehát k egy tetszőleges lehetséges érték, és $P(X=k)$ kiszámításához használjuk a teljes valószínűség tételét az A_1,A_2 teljes eseményrendszerre vonatkozóan:
$$P(X=k)=P(X=k|A_1)\cdot P(A_1)+P(X=k|A_2)\cdot P(A_2).$$
$X=k$ azt jelenti, hogy az első $k-1$ dobás írás, a k. pedig fej. A dobások egymástól függetlenek, ezért ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}$, ha a szabályos érmével dobunk, és $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{2}{3}$, ha a szabálytalan érmével dobunk. Így a teljes valószínűség tételét alkalmazva megkapjuk X eloszlását:
$$P(X=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2},\quad k=1,2\ldots.$$
b) A kérdés az eddigi jelölésekkel A_1 feltételes valószínűsége a $B=\{X=3\}$ eseményre vonatkozóan. Alkalmazhatjuk Bayes tételét szintén az A_1,A_2 teljes eseményrendszerre, a feltételes valószínűségeket pedig ugyanúgy számíthatjuk ki, mint az *a)* feladatban:
$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B|A_1)\cdot P(A_1)+P(B|A_2)\cdot P(A_2)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}\approx 0,6279.$$

C csoport, megoldások

1. Az 52 lapból visszatevés nélkül ötöt kihúzni $\binom{52}{5}$-féleképpen lehet, szimmetria miatt a húzások egyformán valószínűek. Így mindkét feladatban megtehetjük, hogy a megfelelő húzások számát osztjuk az összes húzás számával.
a) Csupa egyforma színű lapot húzni négyféleképpen lehetséges: csak treff, káró, kőr, illetve pikk lapokat húzunk. Minden színből 13 lap van a pakliban, így egy adott színből $\binom{13}{5}$-féleképpen választhatunk ki öt lapot, ennyi a megfelelő húzások száma. Tehát annak valószínűsége, hogy csupa egyforma színű lapot húzunk:
$$4 \cdot \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0,001.$$
b) Azt kell megszámolni, hogy hány olyan húzás van, amelyben 2 fekete és 3 piros lap van. A 26 fekete lapból $\binom{26}{2}$-féleképpen válaszhatjuk ki, hogy melyik kettő kerüljön a kihúzottak közé. Szintén 26 piros lap van, ebből $\binom{26}{3}$-féleképpen választhatunk ki hármat. Bárhogyan választottuk a kihúzott fekete lapokat, bármelyik három piros lap melléjük kerülhet, ezért a húzások számához szorozni kell a binomiális együtthatókat. Tehát annak valószínűsége, hogy pontosan két fekete lapot húzunk:
$$\frac{\binom{26}{2} \cdot \binom{26}{3}}{\binom{52}{5}} \approx 0,3251.$$
Mivel visszatevés nélkül húzunk, a kihúzott fekete lapok száma hipergeometrikus eloszlású 52, 26, 5 paraméterekkel, ebből is megkapható a fenti képlet.

2. Minden dobás hatféle lehet, így az öt dobás során összesen 6^5-féle dobássorozat fordulhat elő. Mivel a dobókocka szabályos, ezek egyformán valószínűek. Így mindkét feladatban megtehetjük, hogy a megfelelő dobássorozatok számát osztjuk az összes dobássorozat számával, és így kapjuk a kérdéses valószínűséget.
a) Ha minden dobás különböző, az első dobás hatféle lehet. Bármi is az első dobás értéke, a második dobás bármilyen ettől különböző érték lehet, azaz ötféle, így az első két dobás $6 \cdot 5$-féle lehet. Bármilyen az első két dobás, a harmadik tetszőleges ezektől különböző lehet, azaz négyféle. Így az első három dobás $6 \cdot 5 \cdot 4$-féle lehet. Így folytatva az ötödik dobásig, a kérdéses valószínűség:
$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} \approx 0,0926.$$
b) Ha az első és az utolsó dobás egyforma, de más egyezés nincs a dobások között, az első részhez hasonló gondolatmenettel az első dobás hatféle lehet, a második ötféle, a harmadik négyféle, a negyedik háromféle, az utolsó, mely az elsővel megegyezik, egyféle. Így a kérdéses valószínűség:
$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} \approx 0,0463.$$

3. Az eseménytér hatelemű, az elemi események a lehetséges dobássorozatoknak felelnek meg: $\Omega = \{\omega_{FF}, \omega_{FI}, \omega_{IFF}, \omega_{IFI}, \omega_{IIF}, \omega_{III}\}$. Az elemi események valószínűsége rendre $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$, hiszen például annak valószínűsége, hogy mindkét dobás fej, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, mert a dobások függetlenek és az érme szabályos. Ennek alapján számolva:
$$P(A) = P(\{\omega_{FF}, \omega_{IFF}, \omega_{IFI}\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2};$$

$$P(B) = P(\{\omega_{IIF}, \omega_{IFF}\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4};$$

$$P(A \cap B) = P(\{\omega_{IFF}\}) = \frac{1}{8}.$$

Látható, hogy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, azaz a definíció szerint A és B függetlenek.

4. $i = 1, 2, \ldots n$-re jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i. cédulát egyszer sem húztuk ki. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ azt jelenti, hogy valamelyik cédulát egyszer sem húztuk ki, ez éppen a kérdéses esemény komplementere. Használjuk a Poincaré-formulát az unió valószínűségének kiszámítására:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_n \le n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}\right).$$

$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}$ valószínűsége $\left(\frac{n-j}{n}\right)^{2n}$, hiszen mind a $2n$ húzás során n-féle cédulát kaphatunk, így n^{2n} húzás van összesen. A feladat feltételeiből következik, hogy ezek egyformán valószínűek. A metszethez tartozó húzásoknál az $i_1, \ldots i_j$ cédulák nem szerepelhetnek, így mind a $2n$ húzás során $n-j$-féle cédulát kaphatunk, így $(n-j)^{2n}$ húzás felel meg a feltételeknek, ebből adódik a metszet valószínűsége. A belső összeg tagjai tehát egyenlők, a tagok száma pedig $\binom{n}{j}$, hiszen ennyiféleképpen választhatunk ki az n lehetséges index közül j darab különbözőt. Mindezeket összevetve a kérdéses valószínűség:

$$1 - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \left(\frac{n-j}{n}\right)^{2n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \binom{n}{j} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{2n}.$$

5. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a szabályos érmét húztuk, A_2 azt, hogy a szabálytalant. Az érmék megkülönböztethetetlenek, így $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. Másrészt A_1 és A_2 közül mindig pontosan egy következik be, a két esemény teljes eseményrendszert alkot.
a) X azt jelöli, hogy hányadik dobásnál kaptuk az első fejet, így X lehetséges értékei: $k = 1, 2, \ldots$. Legyen tehát k egy tetszőleges lehetséges érték, és $P(X = k)$ kiszámításához használjuk a teljes valószínűség tételét az A_1, A_2 teljes eseményrendszerre vonatkozóan:

$$P(X = k) = P(X = k|A_1) \cdot P(A_1) + P(X = k|A_2) \cdot P(A_2).$$

$X = k$ azt jelenti, hogy az első $k-1$ dobás írás, a k. pedig fej. A dobások egymástól függetlenek, ezért ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}$, ha a szabályos érmével dobunk, és $\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$, ha a szabálytalan érmével dobunk. Így a teljes valószínűség tételét alkalmazva megkapjuk X eloszlását:

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2 \ldots.$$

b) A kérdés az eddigi jelölésekkel A_1 feltételes valószínűsége a $B = \{X = 3\}$ eseményre vonatkozóan. Alkalmazhatjuk Bayes tételét szintén az A_1, A_2 teljes eseményrendszerre, a feltételes valószínűségeket pedig ugyanúgy számíthatjuk ki, mint az *a)* feladatban:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} \approx 0,4576.$$

D csoport, megoldások

1. Minden dobás hatféle lehet, így az öt dobás során összesen 6^5-féle dobássorozat fordulhat elő. Mivel a dobókocka szabályos, ezek egyformán valószínűek. Így mindkét feladatban megtehetjük, hogy a megfelelő dobássorozatok számát osztjuk az összes dobássorozat számával, és így kapjuk a kérdéses valószínűséget.
a) Ha minden dobás különböző, az első dobás hatféle lehet. Bármi is az első dobás értéke, a második dobás bármilyen ettől különböző érték lehet, azaz ötféle, így az első két dobás $6 \cdot 5$-féle lehet. Bármilyen az első két dobás, a harmadik tetszőleges ezektől különböző lehet, azaz négyféle. Így az első három dobás $6 \cdot 5 \cdot 4$-féle lehet. Így folytatva az ötödik dobásig, a kérdéses valószínűség:
$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} \approx 0,0926.$$
b) Ha az utolsó két dobás egyforma, de más egyezés nincs a dobások között, az első részhez hasonló gondolatmenettel az első dobás hatféle lehet, a második ötféle, a harmadik négyféle, a negyedik háromféle, az utolsó, mely a negyedikkel megegyezik, egyféle. Így a kérdéses valószínűség:
$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} \approx 0,0463.$$

2. A 32 lapból visszatevés nélkül négyet kihúzni $\binom{32}{4}$-féleképpen lehet, szimmetria miatt a húzások egyformán valószínűek. Így mindkét feladatban megtehetjük, hogy a megfelelő húzások számát osztjuk az összes húzás számával.
a) Csupa egyforma színű lapot húzni négyféleképpen lehetséges: csak zöld, piros, tök, illetve makk lapokat húzunk. Minden színből 8 lap van a pakliban, így egy adott színből $\binom{8}{4}$-féleképpen választhatunk ki négy lapot, ennyi a megfelelő húzások száma. Tehát annak valószínűsége, hogy csupa egyforma színű lapot húzunk:
$$4 \cdot \frac{\binom{8}{4}}{\binom{32}{4}} \approx 0,0078.$$
b) Azt kell megszámolni, hogy hány olyan húzás van, amelyben 3 piros és 1 nem piros lap van. A 8 piros lapból $\binom{8}{3}$-féleképpen válaszhatjuk ki, hogy melyik három kerüljön a kihúzottak közé. 24 nem piros lap van, ebből $\binom{24}{1}$-féleképpen választhatunk ki egyet. Bárhogyan választottuk a kihúzott piros lapokat, bármelyik három nem piros lap melléjük kerülhet, ezért a húzások számához szorozni kell a binomiális együtthatókat. Tehát annak valószínűsége, hogy pontosan három piros lapot húzunk:
$$\frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{32}{4}} \approx 0,0374.$$
Mivel visszatevés nélkül húzunk, a kihúzott zöld lapok száma hipergeometrikus eloszlású 32, 8, 4 paraméterekkel, ebből is megkapható a fenti képlet.

3. $i = 1, 2, \dots n$-re jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i. golyót egyszer sem húztuk ki. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ azt jelenti, hogy valamelyik golyót egyszer sem húztuk ki, ez éppen a kérdéses esemény komplementere. Használjuk a Poincaré-formulát az unió valószínűségének kiszámítására:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_n \le n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}\right).$$

$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}$ valószínűsége $\left(\frac{n-j}{n}\right)^{3n}$, hiszen mind a $3n$ húzás során n-féle golyót kaphatunk, így n^{3n} húzás van összesen. A feladat feltételeiből következik, hogy ezek egyformán valószínűek. A metszethez tartozó húzásoknál az $i_1, \ldots i_j$ golyók nem szerepelhetnek, így mind a $3n$ húzás során $n-j$-féle golyót kaphatunk, így $(n-j)^{3n}$ húzás felel meg a feltételeknek, ebből adódik a metszet valószínűsége. A belső összeg tagjai tehát egyenlők, a tagok száma pedig $\binom{n}{j}$, hiszen ennyiféleképpen választhatunk ki az n lehetséges index közül j darab különbözőt. Mindezeket összevetve a kérdéses valószínűség:

$$1 - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \left(\frac{n-j}{n}\right)^{3n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \binom{n}{j} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{3n}.$$

4. Az eseménytér hatelemű, az elemi események a lehetséges dobássorozatoknak felelnek meg: $\Omega = \{\omega_{FF}, \omega_{FI}, \omega_{IFF}, \omega_{IFI}, \omega_{IIF}, \omega_{III}\}$. Az elemi események valószínűsége rendre $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$, hiszen például annak valószínűsége, hogy mindkét dobás fej, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, mert a dobások függetlenek és az érme szabályos. Ennek alapján számolva:

$$P(A) = P(\{\omega_{FI}, \omega_{IFI}, \omega_{IFF}\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2};$$

$$P(B) = P(\{\omega_{IIF}, \omega_{IFF}\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4};$$

$$P(A \cap B) = P(\{\omega_{IFF}\}) = \frac{1}{8}.$$

Látható, hogy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, azaz a definíció szerint A és B függetlenek.

5. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a szabályos érmét húztuk, A_2 azt, hogy a szabálytalant. Az érmék megkülönböztethetetlenek, így $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. Másrészt A_1 és A_2 közül mindig pontosan egy következik be, a két esemény teljes eseményrendszert alkot.
a) X azt jelöli, hogy hányadik dobásnál kaptuk az első fejet, így X lehetséges értékei: $k = 1, 2, \ldots$. Legyen tehát k egy tetszőleges lehetséges érték, és $P(X = k)$ kiszámításához használjuk a teljes valószínűség tételét az A_1, A_2 teljes eseményrendszerre vonatkozóan:

$$P(X = k) = P(X = k | A_1) \cdot P(A_1) + P(X = k | A_2) \cdot P(A_2).$$

$X = k$ azt jelenti, hogy az első $k-1$ dobás írás, a k. pedig fej. A dobások egymástól függetlenek, ezért ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}$, ha a szabályos érmével dobunk, és $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3}$, ha a szabálytalan érmével dobunk. Így a teljes valószínűség tételét alkalmazva megkapjuk X eloszlását:

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2 \ldots.$$

b) A kérdés az eddigi jelölésekkel A_1 feltételes valószínűsége a $B = \{X = 3\}$ eseményre vonatkozóan. Alkalmazhatjuk Bayes tételét szintén az A_1, A_2 teljes eseményrendszerre, a feltételes valószínűségeket pedig ugyanúgy számíthatjuk ki, mint az *a)* feladatban:

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} \approx 0,6279.$$