1. Az X valószínűségi változó a $[0, c]$ intervallumon veszi fel értékeit és ott sűrűségfüggvénye x^2. Határozzuk meg c értékét és annak valószínűségét, hogy $1 < X < 3$.

2. Az X valószínűségi változó legyen geometriai eloszlású $0 < p < 1$ paraméterrel, az Y valószínűségi változó pedig exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, azaz sűrűségfüggvénye $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}(x > 0)$.

   a) Mennyi $P(X \geq k + l | X \geq k)$, ha $k, l \in \mathbb{N}$?

   b) Mennyi $P(Y > t + s | Y > t)$, ha $s, t \geq 0$?

   c) Határozzuk meg X feltételes eloszlását az $\{X \leq k\}$ eseményre nézve ($k \in \mathbb{N}$).

   d) Határozzuk meg Y feltételes eloszlását az $\{Y \leq s\}$ eseményre nézve ($s > 0$).

   e) Határozzuk meg $1 - e^{-\lambda Y}$ eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

3. Az X valószínűségi változó az (a, b) intervallumból (a végpontok lehetnek végtelenek is) veszi fel értékeit, és ott eloszlásfüggvénye F, ami folytonos és szigorúan monoton. Milyen eloszlású az $F(X)$ valószínűségi változó? Határozzuk meg az eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét (ha van).

4. Számítógépünkbe csak egy véletlen függvény van beépítve. Ennek segítségével a $[0, 1]$ intervallumból tudunk véletlen számot generálni egyenletes eloszlás szerint. Ezt felhasználva hogyan lehet tetszőlegesen előírt F eloszlásfüggvényű véletlen számot előállítani?

5. Válasszunk egy pontot találomra, egyenletesen az egységnégyzetből, azaz $[0, 1] \times [0, 1]$- ből. Jelölje ξ a választott pont két koordinátájának az összegét. Számítsuk ki ξ eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

6. Egy részvény árfolyamáról feltételezik, hogy logaritmusa normális eloszlású. Vagyis ha X a részvény árfolyamát leíró valószínűségi változó, akkor $\log X$ eloszlásfüggvénye
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(- \frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) dt \qquad (\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0).$$
   Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.

7. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású ($\alpha > 0, \beta > 0$), ha eloszlásfüggvénye
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{\alpha}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$
   Egy biztosító felelősségi kárairól tudják, hogy millió forintban számolva $(1, 2)$ paraméterű Pareto-eloszlásúak. Ha egy kárról tudjuk, hogy meghaladta az 1 millió forintot, mennyi annak valószínűsége, hogy nem haladja meg a 3 millió forintot?

8. Mutassuk meg, hogy ha az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású, akkor $\ln(1 + X/\beta)$ exponenciális eloszlású α paraméterrel.

9. Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F, a, b adott számok. Mi $aX + b$ eloszlásfüggvénye?

10. A hidrológiában, távközlésben, biológiában és más területeken az egyik leggyakrabban alkalmazott eloszlás a gamma eloszlás. Egy valószínűségi változó gamma eloszlású, ha sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0; \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. $\lambda > 0$ az eloszlás paramétere, $\alpha > 0$ pedig a rendje. Jelölése $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Mutassuk meg, hogy a) $\Gamma(a) = a\Gamma(a)$ minden $a > 0$-ra; b) az imént definiált f függvény valóban sűrűségfüggvény.

11. X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mi X^2 sűrűségfüggvénye?

12. Legyenek $A_1, \dots, A_n$ események. A függetlenség definíciójában az alábbi egyenletek közül $2^n - n - 1$ szerepel: $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_j}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_j})$. Ehelyett tekintsük most az alábbi egyenleteket: $\mathbb{P}(A'_1 \cap A'_2 \ldots \cap A'_n) = \mathbb{P}(A'_1) \cdot \mathbb{P}(A'_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A'_n)$, ahol A'_i vagy A_i, vagy $\overline{A_i}$. Ilyenből 2^n darab van. Ezek közül is elég $2^n - n - 1$ darab, hogy már következzen az $A_1, \dots, A_n$ események függetlensége? Ha igen, melyek azok, amelyeket el lehet hagyni?

13. a) Legyen $\Omega = \mathbb{N}$ egy valószínűségi mező alaphalmaza. Vannak-e olyan $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók ezen a valószínűségi mezőn, melyek függetlenek, és mindegyiknek az eloszlása egy szabályos kockadobás eloszlása?

    b) Van-e olyan valószínűségi mező, melyen vannak olyan $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók, hogy mindegyiknek az eloszlása egy szabályos kockadobás eloszlása?

14. Legyenek X és Y független és egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon, továbbá legyen $Z = \{X + Y\}$. Mutassuk meg, hogy ekkor X, Y, Z páronként függetlenek és azonos eloszlásúak, de közülük bármely kettő már egyértelműen meghatározza a harmadikat.

15. U és V független valószínűségi változók f és g sűrűségfüggvénnyel. Határozzuk meg $U - V$ sűrűségfüggvényét.

16. Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzetből. Jelölje (X, Y) a kiválasztott pont koordinátáit. Számítsuk ki $Z = -\ln(XY)$ sűrűségfüggvényét.

17. Legyenek U és V független standard normális eloszlású valószínűségi változók. a) Határozzuk meg $(U + V, U - V)$ együttes eloszlását. b) Milyen eloszlású $U + V$? Milyen eloszlású $U - V$?

18. Legyenek X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki a $(2X + 3Y, -X + Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvényét.

19. Azt mondjuk, hogy az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó normális eloszlású μ várható értékkel és Σ kovarianciamátrixszal, ha (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye

    $$f(\underline{s}) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{s} - \underline{\mu})^T \Sigma^{-1} (\underline{s} - \underline{\mu}) \right).$$

    Itt $\underline{s}, \underline{\mu} \in \mathbb{R}^2$ vektorok, $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus pozitív definit mátrix.

    Bizonyítsuk be, hogy ha $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = 0$, akkor X és Y függetlenek.

    (Megjegyzés: ilyenkor $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \mathrm{cov}(X, Y)$.)

20. X és Y legyenek független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mennyi annak valószínűsége, hogy a) $Y < |X|$? b) $2 < |X| + |Y| < 3$?

21. A standard Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{C}{1+x^2}$.

    a) Legyen U a $[0, \pi]$ intervallumban egyenletes eloszlású. Mutassuk meg, hogy ekkor $X = \mathrm{tg}\, U$ eloszlása Cauchy. Mennyi C értéke?

    b) Legyen X Cauchy-eloszlású. Határozzuk meg $\log |X|$ sűrűségfüggvényét.

    c) Legyenek X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy X/Y Cauchy-eloszlású.

22. Legyenek U_1 és U_2 a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású, független valószínűségi változók. Legyen

$$X_1 = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2), \qquad X_2 = \sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2).$$

Mutassuk meg, hogy X_1 és X_2 független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

23. $^{(+)}$ Legyen X, Y és Z független és standard normális eloszlású. Határozzuk meg $\frac{X+YZ}{\sqrt{1+Z^2}}$ eloszlását.

24. X és Y függetlenek, eloszlásuk rendre $\text{Gamma}(a,\lambda)$ és $\text{Gamma}(b,\lambda)$. Bizonyítsuk be, hogy $X+Y$ és $X/(X+Y)$ függetlenek, és határozzuk meg az eloszlásukat.

25. A q szabadsági fokú χ^2-eloszlás q darab független standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzetösszegének eloszlása. Határozzuk meg a sűrűségfüggvényét.

26. $X_1,\ldots,X_n$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Sorbarendezve az $X_1^* \le X_2^* \le \ldots \le X_n^*$ sorozatot kapjuk belőlük.

a) Határozzuk meg X_k^* eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

b) Határozzuk meg $(X_1^*,\ldots,X_n^*)$ együttes eloszlását, és mutassuk meg, hogy ez megegyezik

$$\left(\frac{Y_1}{Y_1+\ldots+Y_{n+1}}, \frac{Y_1+Y_2}{Y_1+\ldots+Y_{n+1}}, \ldots, \frac{Y_1+\ldots+Y_n}{Y_1+\ldots+Y_{n+1}}\right)$$

együttes eloszlásával, ahol $Y_1,\ldots,Y_{n+1}$ független, azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Igaz-e, hogy a fenti, Y_i-k részletösszegeiből képzett valószínűségi vektorváltozó független az $Y_1+\ldots+Y_{n+1}$ összegtől?

27. Legyenek X és Y független, azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $|X-Y|$ eloszlását.

28. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ekkor $[X]$ és $\{X\}$ független. Milyen eloszlásúak?

29. Az X valószínűségi változó *koncentrációfüggvénye* $Q_X(t) = \sup_x \mathbb{P}(x \le X \le x+t)$, $t \ge 0$. Mutassuk meg, hogy ha X és Y független, akkor $Q_{X+Y}(t) \le Q_X(t)$.

30. $^{(+)}$ $X_1, X_2, \ldots$ legyenek független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Legyen

$$N = \min\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n > 1\}.$$

a) Számítsuk ki az N valószínűségi változó várható értékét.
b) Számítsuk ki az S_N valószínűségi változó várható értékét.

31. $^{(+)}$ $X_1, X_2, \ldots$ legyenek független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Legyen

$$N = \min\{n : X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n < 1/2\}.$$

Számítsuk ki az N valószínűségi változó várható értékét.

32. Legyen X standard normális eloszlású. Mutassuk meg, hogy $c,t>0$ esetén

$$\mathbb{P}\left(Y > t + \frac{c}{t} \middle| Y > t\right) < e^{-c}.$$

Mi a határértéke a bal oldalnak, ha $t \to \infty$?

---

33. Számoljuk ki az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ sűrűségfüggvényű $N(\mu,\sigma^2)$ normális eloszlás várható értékét és szórásnégyzetét.

34. Számoljuk ki a standard normális eloszlás pozitív egész rendű momentumait.

35. Legyen X és Y független és standard normális eloszlású. Számoljuk ki

$$(1 + X^2 + Y^2)^{-3/2} \exp\left(\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)\right)$$

várható értékét.

36. Számítsuk ki a gamma-eloszlás várható értékét, szórását és tetszőleges rendű momentumait.

37. Pozitív a és b esetén a $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$ mennyiséget teljes bétaintegrálnak nevezzük, az $f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1 - x)^{b-1}$, $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényű eloszlást pedig (a, b) paraméterű béta-eloszlásnak. Számítsuk ki a béta-eloszlás várható értékét, szórását és tetszőleges rendű momentumait.

38. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, 1 várható értékű, exponenciális eloszlású valószínűségi változók.
a) Milyen eloszlású $\min(X_1, \ldots, X_n)$?
b) Mennyi $\min(X_1, \ldots, X_n)$ várható értéke és szórása?
c) $^{(+)}$ Határozzuk meg $\max(X_1, \ldots, X_n)$ várható értékét és szórását.

39. Legyen X egységnyi paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Adjuk meg $|X - 2|$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és várható értékét.

40. Legyen X egyenletes eloszlású a $(0, 2)$ intervallumon. Számítsuk ki az $R(X^2, X^3)$ korrelációs együtthatót.

41. Legyen X sűrűségfüggvénye $f(x) = 3x^2/7$, ha $1 < x < 2$, máshol pedig 0. Számítsuk ki X és $1/X$ korrelációs együtthatóját.

42. Legyenek az X és az Y valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, a sűrűségfüggvényük $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$, ha $0 < x < \pi$, és 0 máshol. Számítsuk ki az $R(X, X - 2Y)$ korrelációs együtthatót.

43. Legyenek X és Y független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, rendre λ és μ paraméterrel. Számítsuk ki $\min\{X, Y\}$ és $\max\{X, Y\}$ korrelációs együtthatóját.

44. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású független valószínűségi változók, továbbá legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Mutassuk meg, hogy $n > 1$-re az S_n egészrészének és törtrészének a kovarianciája $-1/12$.

b) Számítsuk ki a korrelációs együtthatójukat.

45. $^{(+)}$ A $[0, 1]$ intervallumban választunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint, ez X. Az így keletkezett két intervallumban is választunk egy-egy pontot egyenletes eloszlás szerint, ezek Y és Z (így $Y \le X \le Z$). Milyen eloszlású $(X - Y)/(Z - Y)$?

46. Legyen P és Q (ugyanazon a mérhető téren értelmezett) két valószínűségeloszlás. Ekkor P és Q *információs divergenciája* a

$$D(P\|Q) = \int \log \frac{dP}{dQ}\, dP$$

mennyiség, ha $P \ll Q$, illetve $+\infty$, ha nem. Mutassuk meg, hogy $D(P\|Q) \ge 0$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $P = Q$.

47. Az f sűrűségfüggvényű eloszlás *metrikus entrópiájának* vagy *differenciálentrópiájának* a $H(f) = -\int f(x) \log f(x)\, dx$ (ahol $0 \cdot \log 0 = 0$) mennyiséget nevezzük. Abszolút folytonos eloszlású X valószínűségi változó esetén jelölje $H(X)$ az eloszlás metrikus entrópiáját. Bizonyítsuk be, hogy

a) $H(X+c)=H(X)$, $H(cX)=H(X)-\log|c|$,

b) ha $D^2(X)=\sigma^2$, akkor $H(X)\le\frac{1}{2}(1+\log 2\pi\sigma^2)$, és egyenlőség csak normális eloszlás esetén teljesül,

c) ha $P(X\ge 0)=1$ és $EX=\mu$, akkor $H(X)\le 1+\log\mu$, és egyenlőség csak exponenciális eloszlás esetén teljesül,

d) ha $P(a\le X\le b)=1$, akkor $H(f)\le\log(b-a)$, és egyenlőség csak az egyenletes eloszlás esetén teljesül.

---

48. Legyen az $X_n:\Omega\to\mathbb{R}$ valószínűségi változó eloszlása a következő:

$$\mathbb{P}(X_n=n^2)=\mathbb{P}(X_n=-n^2)=1/\sqrt{n};\quad \mathbb{P}(X_n=1/n^2)=\mathbb{P}(X_n=-1/n^2)=1/2-1/\sqrt{n}.$$

Konvergens-e az (X_n) sorozat eloszlásban, illetve sztochasztikusan? Ha igen, mi a limesz?

49. Az (Y_n) valószínűségi változó legyen egyenletes eloszlású az $\{0,1/n,2/n,\dots,1\}$ halmazon (vagyis Y_n a halmaz minden elemét azonos valószínűséggel veszi fel). Konvergens-e (Y_n) eloszlásban?

50. Mutassuk meg, hogy ha $c\in\mathbb{R}$ rögzített szám, és a (ξ_n) valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál c-hez, akkor $\xi_n\to c$ sztochasztikusan is.

51. Mutassuk meg, hogy ha ξ_n,ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $\xi_n\to\xi$ eloszlásban és $\eta_n\to 0$ sztochasztikusan, akkor *a)* $\xi_n+\eta_n\to\xi$ eloszlásban; *b)* $\xi_n\eta_n\to 0$ sztochasztikusan.

52. $\xi_n\to\xi$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $\xi_n-\xi\to 0$ eloszlásban?

53. Mutassunk arra példát, hogy ξ_n,ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $\xi_n\to\xi$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.

54. Bizonyítsuk be, hogy az (X_n) valószínűségi változók sorozata pontosan akkor konvergál sztochasztikusan az X valószínűségi változóhoz, ha minden (X_{n_k}) részsorozatnak van olyan részsorozata, mely 1 valószínűséggel konvergál X-hez.

55. Mutassunk meg példákkal, hogy az L^1-beli konvergencia és az 1 valószínűségi konvergencia közül egyikből sem következik a másik.

56. Legyenek (X_n) és X valószínűségi változók nemnegatívak és véges várható értékűek. Mutassuk meg, hogy $X_n\to X$ pontosan akkor teljesül L^1-ben, ha $X_n\to X$ sztochasztikusan és $\mathbb{E}(X_n)\to\mathbb{E}(X)$.

57. Mutassuk meg, hogy $\xi_n\to\xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon>0$-ra teljesül, hogy $P\left(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon \text{ végtelen sok } n\text{-re }\right)=0$.

---

58. Van-e olyan valószínűségi változó, amelynek karakterisztikus függvénye a) $\cos t$; b) $\frac{\sin t}{t}$; c) $\cos^2 t$? d) $e^{-|t|}$? e) $\frac{\sin t}{2t}$? f) $\frac{\sin(t/2)}{(t/2)}$?

59. Legyen $\varphi(t)=t+1$, ha $-1\le t\le 0$, $\varphi(t)=1-t$, ha $0\le t\le 1$, és 0 különben. Van-e olyan valószínűségi változó, aminek a karakterisztikus függvénye φ?

60. Legyen Φ az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Van-e olyan valószínűségi változó, aminek karakterisztikus függvénye $|\Phi(t)|^2$?

61. Mutassuk meg, hogy ha létezik $t_0\ne 0:|\Phi(t_0)|=1$, akkor a megfelelő eloszlás rácsos.

62. Az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $e^{-t^2/2}$. Milyen eloszlású X?

63. a) Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $X+Y$ karakterisztikus függvényét és eloszlását. b) Legyenek $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ és $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg $X+Y$ eloszlását.

64. a) Legyenek X, Y független $1/6$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki $X-Y$ karakterisztikus függvényét. b) Az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak. $X_1 + \ldots + X_n$ karakterisztikus függvénye $e^{-t^2/2}$. Milyen eloszlású X_1?

65. a) Legyen X λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a karakterisztikus függvényét. b) Bizonyítsuk be, hogy független Poisson-eloszlású valószínűségi változók összege is Poisson-eloszlású, és a paraméterek összeadódnak.

66. Legyenek X és Y független Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy $(X+Y)/2$ is Cauchy-eloszlású.

67. (+) Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó korlátlanul osztható, ha minden $n \geq 1$ egészhez van olyan Y_n valószínűségi változó, hogy n darab független, Y_n-nel azonos eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlása éppen X eloszlása. Bizonyítsuk be, hogy korlátlanul osztható valószínűségi változó karakterisztikus függvénye sehol sem 0.

---

68. Legyen X_p geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel. Határozzuk meg pX_p határeloszlását, amint $p \to 0$.

69. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?

70. A ξ_n valószínűségi változó Gamma(n, λ) eloszlású. Mennyi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\lambda\xi_n - n}{\sqrt{n}} < 1,96\right)?$$

71. Legyen X_λ Poisson-eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke λ. Határozzuk meg $(X_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ határeloszlását, amint $\lambda \to \infty$.

72. Legyen az X_n valószínűségi változó n rendű és p paraméterű negatív binomiális valószínűségi változó. Számítsuk ki $\frac{pX_n - n}{\sqrt{n(1-p)}}$ határeloszlását, amint $n \to \infty$.

73. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók, eloszlásuk: $P(\xi_n = 1) = 1/n,\ P(\xi_n = 0) = 1 - 1/n$. Mihez tart eloszlásban $n \to \infty$ esetén

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - \mathbb{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{D(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}?$$

74. Minden pozitív egész n-re a $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,n}$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak, úgy, hogy

$$\mathbb{P}(\xi_{n,k} = \sqrt{n}) = \mathbb{P}(\xi_{n,k} = -\sqrt{n}) = 1/2n,\ \mathbb{P}(\xi_{n,k} = 0) = (n-1)/n.$$

Mihez tart eloszlásban $n \to \infty$ esetén

$$\frac{\xi_{n,1} + \xi_{n,2} + \ldots + \xi_{n,n}}{\sqrt{n}D(\xi_{n,1})}?$$

75. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy minden x-re $n \to \infty$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\frac{4\sum_{k=1}^{n} kX_k - n^2}{n^{3/2}} < x\right) \to \Phi\left(\frac{3x}{2}\right).$$

---

76. Az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók legyenek független kockadobások eredményei. Számítsuk ki az alábbiakat:

a) $E(X_1 + X_2)$;

b) $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2 = 4)$;

c) $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2 = 7)$;

d) $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2)$;

e) $\mathbb{E}(X_1|X_1 + \ldots + X_n)$;

f) $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3|X_1)$;

g) $\mathbb{E}(X_1 X_2|X_1)$;

h) $\mathbb{E}(X_1 X_2|X_3 + X_4)$;

i) $\mathbb{E}(X_1^2 X_2 X_3|X_2)$.

77. Legyenek X és Y független, azonos paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az alábbiakat: $\mathbb{P}(X = k|X = Y)$, $\mathbb{P}(X = k|X + Y)$, $\mathbb{E}(X|X + Y)$.

78. Az X, Y valószínűségi változók legyenek független λ paraméterű exponenciális eloszlásúak. a) Határozzuk meg $\mathbb{E}(X|X+Y)$-t. b) Határozzuk meg X-nek $X+Y$-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényét.

79. $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók. $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$ minden n egészre, ahol $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mi lesz $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_n)$?

80. Százszor dobunk egy olyan pénzérmével, mellyel p a fej dobásának valószínűsége. A dobások egymástól függetlenek. Jelölje X, hogy az első huszonöt dobásból hány fej lett, Y pedig, hogy hány fejet dobtunk összesen. a) Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y|X)$-t. b) Határozzuk meg $\mathbb{E}(X|Y)$-t.

81. (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = e^{-y}$, ha $0 < x < y$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X|Y)$-t és $\mathbb{E}(Y|X)$-t.

82. (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \frac{12}{5}(x + y)$, ha $0 \le \frac{x}{2} \le y \le 1 - \frac{x}{2}$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y|X)$-t.

83. Legyen S_n bolyongás: 0-ból indulva minden lépésben a korábbiaktól függetlenül p valószínűséggel felfelé, $q = 1 - p$ valószínűséggel lefelé lépünk egyet. S_n azt jelöli, hogy hova érkezünk n lépés után.

a) Milyen c-re igaz, hogy $S_n - nc$ martingál?

b) Bizonyítsuk be, hogy $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ martingál.

c) Legyen τ az első olyan időpont, amikor a bolyongás elér 10-be vagy -5-be. Bizonyítsuk be, hogy τ megállási idő.

d) Mennyi annak valószínűsége, hogy $S_\tau = 10$, vagyis a bolyongás hamarabb ér 10-be, mint -5-be?

e) Határozzuk meg τ várható értékét.

84. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi folyamatok mindegyike martingál.

a) $S_n, S_n^2 - n, Y_n = t^n \left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^{S_n}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $0 < t < 1$ rögzített, (S_n) egyszerű szimmetrikus bolyongás.

b) $Z_n = 2^n \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

c) $Z_n = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n\lambda^2}{2}\right)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $\lambda > 0$ rögzített, $X_1, X_2, \ldots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg azt is, hogy

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left(\sum_{i=1}^k X_i - \frac{\alpha k}{2}\right) > \beta\right) \le e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta > 0)\,.$$

d) $Z_n = \left(\lambda^n \prod_{i=1}^n (X_{2i-1} + X_{2i})\right)^{-1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

85. Mutassuk meg, hogy $(I(\nu > n), \mathcal{F}_n)$ szupermartingál és $(I(\nu \le n), \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, ha ν megállási idő.

86. Legyenek az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $D^2(X_n) = \sigma_n^2$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Mutassuk meg, hogy $S_n^2 - B_n^2$ martingál.

87. Egy részeg ember bolyong a síkon a lámpaoszloptól indulva. Minden lépése egységnyi hosszúságú, az iránya viszont véletlenszerű. Jelölje X_n a távolságát az oszloptól n lépés után. Mutassuk meg, hogy $X_n^2 - n$ martingál.

88. Egy urnában a piros és b kék golyó van. Minden húzásnál kiveszünk egy darabot véletlenszerűen egyenletesen, és c olyan színű golyót teszünk az urnába, amilyen színűt húztunk. Bizonyítsuk be, hogy a piros golyók aránya 1 valószínűséggel konvergál, amint a húzások száma végtelenhez tart. Mi a limesz eloszlása?

89. Mihez tart n szabályos kockadobás mértani közepe? Pontosabban legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, szabályos kockadobások. Mihez tart az $\sqrt[n]{X_1 \ldots X_n}$ sorozat 1 valószínűséggel, amint $n \to \infty$?

90. $^{(+)}$ Legyen X_n a következő tulajdonságú, $[0,1]$-beli értékeket felvevő valószínűségiváltozó-sorozat: $X_1 = a$ valamely $0 < a < 1$-re és

$$P\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\middle|\mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n; \quad P\left(X_{n+1} = \frac{X_n + 1}{2}\middle|\mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

Mutassuk meg, hogy X_n L_1-ben konvergens martingál. Adjuk meg X_∞ eloszlását.

91. Mutassuk meg, hogy ha az X_n szubmartingálra $E(X_n) = E(X_1)$ minden n-re, akkor X_n martingál.

92. Legyenek $X_1, X_2 \ldots$ valószínűségi változók, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ $(n \ge 1)$. Tegyük fel, hogy S_n martingál az $\mathcal{F}_n$ filtrációra nézve. Mennyi $\mathbb{E}(X_i X_j)$, ha $i \ne j$?

93. Tekintsük a következő bolyongást: $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$, az X_i is az $1, -1$ értékeket veszi fel, de $P(X_i = X_{i-1}) = p$ és $P(X_i = -X_{i-1}) = 1 - p$. Legyen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mutassuk meg, hogy $S_{n-1} + \frac{X_n}{2(1-p)}$ martingál.

94. Legyen $a, b > 0$, tegyük fel, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$ és $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál. Ekkor $(aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n)$ és $(\max(X_n, Y_n), \mathcal{F}_n)$ is szubmartingál. Fogalmazzuk meg az analóg állításokat szupermartingálokra!

95. Legyen X_n független valószínűségi változók sorozata a következő eloszlással: $P(X_n = 1/2) = P(X_n = 3/2) = 1/2$. Legyen $Y_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$. Mutassuk meg, hogy martingál. Hova konvergál?

96. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók az alábbi eloszlással:

$$P(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2}; \quad P\left(X_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Mutassuk meg, hogy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ martingál a természetes σ-algebrasorozatra nézve. Mihez tart?

97. $^{(+)}$ Tekintsük az $\{1, \dots, n\}$ halmaz egy véletlen permutációját, úgy, hogy minden permutáció egyformán valószínű. Mennyi annak valószínűsége, hogy a permutáció minden ciklusa belemetsz az $\{1, \dots, k\}$ halmazba?

98. $^{(+)}$ A Galton–Watson elágazó folyamatot a következőképpen definiáljuk. Kezdetben $Z_0 = 1$ egyed él, ő a nulladik nemzedék. Az egyes egyedek egymástól függetlenül véletlen számú utódot hoznak létre egy rögzített, nemnegatív egész értékű eloszlás szerint. Az n. nemzedék utódai alkotják az $n+1$. nemzedéket. Legyen Z_n az n. nemzedék létszáma. Jelölje μ az utódeloszlás várható értékét, σ^2 pedig a szórásnégyzetét, és tegyük fel, hogy $\mu > 1$ (szuperkritikus eset).

   a) Mutassuk meg, hogy $W_n = \mu^{-n} Z_n$ martingál, amely 1 valószínűséggel konvergens, és ha $\sigma^2 < \infty$, akkor L^2-ben is. Jelöle a határértéket W.

   b) Jelölje p annak valószínűségét, hogy a folyamat kihal, vagyis van olyan n, melyre $Z_n = 0$. Igazoljuk, hogy (p^{Z_n}) martingál.

   c) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{P}(W = 0) = p$, tehát ha a folyamat nem hal ki, akkor exponenciális gyorsasággal növekszik.

További feladatok

99. n golyót helyezünk el r urnában véletlenszerűen, egyenletesen, függetlenül. Jelölje U az üresen maradt cellák számát. Számítsuk ki U várható értékét és szórásnégyzetét.

100. n golyót osztunk szét n urnába úgy, hogy mind az n^n lehetőség egyformán valószínű. Jelölje X az üresen maradt cellák számát. Hogyan válasszuk meg $k(n)$, hogy a lehető legkisebb legyen, de $\mathbb{P}(X \geq k)$ teljesüljön?

101. $^{(+)}$ Legyenek X, Y független szentpétervári valószínűségi változók, melyek tehát minden $k = 1, 2, \dots$ esetén a 2^k értéket $1/2^k$ valószínűséggel veszik fel. Mutassuk meg, hogy X és Y megadhatók egy olyan, elég bő valószínűségi mezőn is, amelyen értelmezhető független szentpétervári valószínűségi változóknak egy másik, (X', Y') párja úgy, hogy $X + Y = 2X' + Y'\mathbb{I}(Y' \leq X')$ teljesül 1 valószínűséggel.

102. $^{(-)}$ X és Y független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, λ, illetve μ paraméterekkel. Határozzuk meg az $\mathbb{E}(e^{X+Y})$ várható értéket.

Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

103. $^{(-)}$ Legyenek X és Y független valószínűségi változók, $P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2$, és Y egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon. Határozzuk meg a következő változók eloszlásfüggvényét: $X + Y$, $\frac{1}{2}X + Y$, XY.

104. $^{(-)}$ Legyen F folytonos eloszlásfüggvény, amire $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy $G(x) = 0$ (ha $x < 1$), $G(x) = F(x) - F(1/x)$ (ha $x > 1$) is eloszlásfüggvény.

105. $^{(-)}$ Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq -1,5; \\ (2t+4)/10, & \text{ha } -1,5 < t \leq 0; \\ (2t+5)/10, & \text{ha } 0 < t \leq 1,5; \\ 1, & \text{ha } 1,5 < t. \end{cases}$$

   Ábrázoljuk X eloszlásfüggvényét és határozzuk meg a következő valószínűségeket.

$$\mathbb{P}(X < 0); \qquad \mathbb{P}(X \leq 0); \qquad \mathbb{P}(X \in (1, 3/2)); \qquad \mathbb{P}(|X| \in (1, 3/2]).$$

106. $^{(-)}$ Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq -1,5; \\ \left(\frac{2t+4}{10}\right)^2, & \text{ha } -1,5 < t \leq 0; \\ \left(\frac{2t+5}{10}\right)^2, & \text{ha } 0 < t \leq 1,5; \\ 1, & \text{ha } 1,5 < t. \end{cases}$$

Ábrázoljuk X eloszlásfüggvényét és határozzuk meg a következő valószínűségeket.

$$\mathbb{P}(X < 0); \qquad \mathbb{P}(X \leq 0); \qquad \mathbb{P}(X \in (1, 3/2)); \qquad \mathbb{P}(|X| \in (1, 3/2]).$$

107. $^{(-)}$ Az X valószínűségi változó az értékeit a $(0, 2)$ intervallumban veszi fel, ott a sűrűségfüggvénye $f(t) = Ct^2$. Számítsuk ki

(a) a C pozitív konstans értékét;

(b) X várható értékét;

(c) a $\mathbb{P}(X < 1|X \geq 0,5)$ feltételes valószínűséget.

108. $^{(-)}$ Az X valószínűségi vektorváltozó legyen egyenletes eloszlású
a) az $\{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ egységnégyzeten;
b) az $\{(x, y) : 0 \leq x < y \leq 1\}$ háromszögön.
Mindkét esetben számítsuk ki X eloszlás– és sűrűségfüggvényét, valamint a peremeloszlások eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

109. Legyen F egydimenziós eloszlásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to\infty} x \int_x^\infty \frac{1}{z} dF(z) = 0; \lim_{x\to-\infty} x \int_{-\infty}^x \frac{1}{z} dF(z) = 0;$$

$$\lim_{x\to0+} x \int_x^\infty \frac{1}{z} dF(z) = 0; \lim_{x\to0-} x \int_{-\infty}^x \frac{1}{z} dF(z) = 0.$$

110. $^{(-)}$ Írjuk fel két esemény indikátorainak együttes eloszlásfüggvényét.

111. $^{(-)}$ Legyen az X k dimenziós valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F(x)$, sűrűségfüggvénye $f(x)$. Határozzuk meg a következő valószínűségi vektorváltozók eloszlás– és sűrűségfüggvényét: $-X$; $aX + b$, ahol $a > 0$ valós, $b \in \mathbb{R}^k$; AX, ahol A invertálható $k \times k$-as mátrix; $|X|$, ha $k = 1$; X^2, ha $k = 1$; $\{X\}$ (törtrész), ha $k = 1$.

112. $^{(-)}$ Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f. Mutassuk meg, hogy ekkor az $f(X)$ valószínűségi változó 1 valószínűséggel pozitív.

113. Legyen X egyenletes eloszlású a $[0, Y]$ intervallumon, ahol Y véletlen szám a $[0, 1]$ intervallumon. Adjuk meg X sűrűségfüggvényét.

114. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók, és jelölje $X_1^* \leq X_2^* \leq \ldots \leq X_n^*$ a nagyság szerint sorba rendezett értékeket. Határozzuk meg ezek együttes sűrűségfüggvényét.

115. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y)$. Mutassuk meg, hogy ekkor

(a) $X + Y$ sűrűségfüggvénye $\int_{-\infty}^{\infty} h(t, x - t)dt$;

(b) XY sűrűségfüggvénye $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|} h\left(t, \frac{x}{t}\right)dt$;

(c) X/Y sűrűségfüggvénye $\int_{-\infty}^{\infty} |t|h(tx, t)dt$.

116. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, eloszlásfüggvényük rendre F, illetve G. Mutassuk meg, hogy ekkor $X+Y$ eloszlásfüggvénye $\int_{-\infty}^{\infty} F(x-t)dG(t)$.

Egyenletes eloszlás

117. Legyen $X=(X_1,X_2)$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból származó két független megfigyelés és $Y_1=\frac{X_1^*}{X_2^*}$, $Y_2=(X_2^*)^2$. Számítsuk ki $Y=(Y_1,Y_2)$ együttes sűrűségfüggvényét. Itt $X_1^*=\min(X_1,X_2)$ és $X_2^*=\max(X_1,X_2)$.

118. Legyenek $X_1,X_2,\ldots$ a $(0,1)$ intervallumban egyenletes eloszlású független valószínűségi változók. Határozzuk meg N eloszlását és várható értékét, ha

    (a) $N=\max\{n>0:\prod_{i=1}^n X_i>e^{-\lambda}\},\lambda>0.$
    (b) $N=\min\{n>1:\sum_{i=1}^n X_i>t\},0<t<1.$
    (c) $N=\min\{n>2:X_1<X_2<\ldots<X_{n-1}>X_n\}$. Itt határozzuk meg X_N eloszlását is.

Exponenciális eloszlás

119. $^{(-)}$ Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda=1$ paraméterrel. Számítsuk ki e^{-X} eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

120. Legyen X n rendű, egységnyi paraméterű gamma-eloszlású, Y pedig λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{P}(X<\lambda)=\mathbb{P}(Y\geq n)$.

121. Legyenek X és Y független 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $X-Y$ sűrűségfüggvényét.

122. $^{(+)}$ Egy $X>0$ valószínűségi változót örökifjú tulajdonságúnak nevezünk, ha $\mathbb{P}(X>0)>0$ és

$$\mathbb{P}(X\geq t+s|X\geq t)=\mathbb{P}(X\geq s)$$

teljesül minden $s,t>0$-ra. (a) Mutassuk meg, hogy az örökifjú tulajdonság karakterizálja az exponenciális eloszlást (vagyis ezek és csak ezek az örökifjú eloszlások). (b) Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változóra

$$c_1\mathbb{P}(X\geq s)\leq\mathbb{P}(X\geq t+s|X\geq t)\leq c_2\mathbb{P}(X\geq s)$$

teljesül minden pozitív s,t-re, ahol $0<c_1\leq 1<c_2$. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $\lambda>0$, amivel minden $t>0$-ra

$$\frac{e^{-\lambda t}}{c_2}\leq\mathbb{P}(X\geq t)\leq\frac{e^{-\lambda t}}{c_1},$$

azaz az (a)-beli karakterizáció stabilis.

123. Legyenek $X_1,X_2,\ldots,X_n$ független azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy $\max\{X_1,\ldots,X_n\}$ és $\sum_{i=1}^n\frac{X_i}{i}$ azonos eloszlású. (Útmutatás. Jelölje $X_1^*\leq X_2^*\leq\ldots\leq X_n^*$ a nagyság szerint növekvő sorba rendezett értékeket, és legyen $Y_1=nX_1^*$, $Y_2=(n-1)(X_2^*-X_1^*),\ldots,Y_{n-1}=2(X_{n-1}^*-X_{n-2}^*)$, $Y_n=X_n^*-X_{n-1}^*$. Ekkor $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ eloszlása megegyezik $X_1,X_2,\ldots,X_n$ eloszlásával.)

Normális eloszlás

124. Legyen $\underline{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó, $m\in\mathbb{R}^n$ várható értékkel és Σ kovarianciamátrixszal, továbbá A egy $n\times n$-es mátrix.

    (a) Írjuk fel X és AX sűrűségfüggvényét, ha Σ és A is teljes rangú.
    (b) Mit kapunk AX együttes sűrűségfüggvényének, ha A ortogonális mátrix, $m=\underline{0}$ és A az identitás?

(c) Mutassuk meg, hogy ha $X_1, \ldots, X_n$ független normális eloszlású valószínűségi változók, $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $D^2(X_i) = \sigma^2$, akkor

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \qquad \text{és} \qquad s_n^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_k (X_k - \overline{X})^2$$

függetlenek, és ez utóbbi χ^2_{n-1}-eloszlású (azaz eloszlása megegyezik $n-1$ darab független standard normális valószínűségi változó négyzetösszegének eloszlásával).

125. Számítsuk ki a Student-féle n szabadságfokú t-eloszlás sűrűségfüggvényét. Ez az

$$Y = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n}}}$$

valószínűségi változó eloszlása, ahol $X_0, \ldots, X_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mit kapunk, ha $n = 1$?

126. Legyenek X, Y, Z független, 0 várható értékű normális eloszlású valószínűségi változók. Jelölje $\mathrm{med}\{X, Y, Z\}$ a nagyság szerinti középsőt. Határozzuk meg a következő mennyiségeket:

(a) $\mathbb{P}(X < Y)$; $\mathbb{P}(\mathrm{med}\{X, Y, Z\} = X)$;

(b) $\mathbb{E}(\max(X, Y))$; $\mathbb{E}(\max(X, Y, Z))$;

(c) $D^2(\mathrm{med}(X, Y, Z))$.

127. Legyen X eloszlása $N(0, \sigma^2)$, Y-é $N(0, \varrho^2)$, és tegyük fel, hogy függetlenek. Jelölje $h(x, y)$ az együttes sűrűségfüggvényüket, és legyen $D(\lambda)$ a síkon a $\{(x, y) : h(x, y) = \lambda^2\}$ görbe által határolt alakzat. Mennyi $\mathbb{P}((X, Y) \in D(\lambda))$?

128. A (standard) Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{C}{1+x^2}$.

(a) Legyen X Cauchy-eloszlású. Határozzuk meg $\log |X|$ sűrűségfüggvényét.

(b) Legyen X Cauchy-eloszlású. Mutassuk meg, hogy ekkor $1/X$ és $2X/(1 - X^2)$ is az.

(c) Legyen X Cauchy-eloszlású, Y pedig tetszőleges, X-től független. Mutassuk meg, ekkor $(X + Y)/(1 - XY)$ is Cauchy-eloszlású.

(d) Legyenek X és Y függetlenek és azonos eloszlásúak, sűrűségfüggvényük $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^4}$. Mutassuk meg, hogy X/Y Cauchy-eloszlású.

129. Az egységkör belsejében két pontot veszünk fel egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak valószínűsége, hogy az általuk meghatározott szakasz, mint átmérő fölé írt kör nem metszi az egységkörvonalat?

Borel–Cantelli-lemma

130. Legyen A_n független események olyan sorozata, melyre $\mathbb{P}(A_n) < 1$ és $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = 1$. Mutassuk meg, hogy az A_n események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be.

131. (*A második Borel–Cantelli-lemma Erdős–Rényi-féle általánosítása.*) Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ tetszőleges események, amelyekre $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Vezessük be a

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j)}{(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i))^2}$$

jelölést. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \frac{1}{\liminf b_n}.$$

(Útmutatás. $(1 - \varepsilon)^2 \leq b_n \mathbb{P}(Z_n > \varepsilon)$, ahol $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{A_j}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)}$).

Várható érték

132. Legyen az A esemény független az X valószínűségi változótól. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X)$.

133. Legyen az X nemnegatív valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathbb{E}(\min(X, c)) = \int_0^c 1 - F(t)dt$ teljesül.

134. $^{(+)}$ Legyen X és Y várható értéke véges, eloszlásfüggvényüket jelölje rendre F illetve G, ezek általánosított inverzét pedig F^{-1} illetve G^{-1}. Mutassuk meg, hogy ekkor

    (a) $\mathbb{E}(X - Y) = \int_0^1 (F^{-1} - G^{-1})$;

    (b) $\min\{\mathbb{E}(|X - Y|) : F = F_X \text{ és } G = F_Y\} = \int_0^1 |F^{-1} - G^{-1}|$.

135. X eloszlásfüggvényét jelölje F, Y-ét G, az együttes eloszlásfüggvényüket pedig H. Mutassuk meg, hogy

$$\max\{F(x) + G(y) - 1, 0\} \leq H(x, y) \leq \min\{F(x), G(y)\}.$$

136. Legyen X várható értéke véges. Mutassuk meg, hogy az $f(m) = \mathbb{E}(|X - m|)$ mennyiség pontosan akkor minimális, ha m az X mediánja. (Útmutatás: $2F_X(m) - 1 \leq \frac{f(m')-f(m)}{m'-m} \leq 2F_X(m') - 1$, ha $m < m'$.)

137. Legyen X és Y a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású és független, továbbá legyen Z olyan valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(Z = X) = \mathbb{P}(Z = Y) = 1/2$. Mekkora Z mediánjának lehető legkisebb, illetve legnagyobb értéke?

138. Egy telefonközpontban az egymás utáni hívások között eltelt időtartamok λ paraméterű exponenciális eloszlású, független valószínűségi változók. Átlagosan hány hívás fut be egy T hosszúságú időintervallumban?

Kovariancia, korreláció, momentumok

139. Mutassuk meg, hogy ha X, Y kovarianciája véges (azaz $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ mindegyike véges), akkor

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \int_{\mathbb{R}\times R} (F_{X,Y}(x, y) - F_X(x)F_Y(y))dxdy.$$

140. Legyen X k-dimenziós, Y pedig l-dimenziós vektorváltozó. Ekkor a (kereszt)kovarianciájuk $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)^T)$, ami egy $k \times l$-es mátrix. Mutassuk meg, hogy a kovariancia bilineáris, azaz ha $X_i, Y_j (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ vektorváltozók, X_i dimenziója k_i, Y_j-é pedig l_j, továbbá $A_i \in \mathbb{R}^{k\times k_i}, B_j \in \mathbb{R}^{l\times l_j}$, akkor

$$\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i X_i, \sum_{j=1}^{m} B_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_i \mathrm{cov}(X_i, Y_j)B_j^T.$$

141. Legyen az X valószínűségi vektorváltozó kovarianciamátrixa Σ. Mutassuk meg, hogy ha Σ rangja r, akkor

    (a) létezik egy r dimenziós S hipersík, melyre $\mathbb{P}(X \in S) = 1$. (Útmutatás: $S = \mathbb{E}(X) + \mathrm{im}\Sigma$.)

    (b) X-nek létezik r olyan koordinátája, hogy az összes többi koordináta ezek lineáris függvénye.

142. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású pozitív valószínűségi változók. Számítsuk ki az $Y_k = \frac{X_1+\ldots+X_k}{X_1+\ldots+X_n}$ valószínűségi változó várható értékét és az $R(Y_j, Y_k)$ korrelációs együtthatót.

143. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó k. momentuma véges. Mutassuk meg, hogy ekkor $\lim_{x\to\infty} x^k(1 - F(x) + F(x - 0)) = 0$.

144. Tegyük fel, hogy a $\mu_n = \mathbb{E}(X^n)$ momentum véges minden $n = 0, 1, \ldots$ esetén. Mutassuk meg, hogy a momentumok sorozata pozitív szemidefinit, azaz tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mellett $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_{i+j} x_i x_j \geq 0$.

Egyenlőtlenségek

145. (*Egyoldali Csebisev-egyenlőtlenség.*) Tegyük fel, hogy $\mu = \mathbb{E}(X)$ és $\sigma^2 = D^2(X)$ véges. Legyen $t > 0$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{P}(X - \mu \geq \sigma t) \leq \frac{1}{1+t^2}$. (Útmutatás. standardizáljunk, és alkalmazzuk a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget a $t \leq \mathbb{E}((t - X)\mathbb{I}(X < t))$ egyenlőtlenség jobb oldalán.)

146. Legyen az X valószínűségi változó unimodális eloszlású, azaz a sűrűségfüggvénye páros és monoton fogyó a pozitív féltengelyen. Tegyük fel, hogy $D^2(X) = \sigma^2 < \infty$ és $t > 0$. Ekkor $\mathbb{P}(|X| \geq \sigma t) \leq \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{t^2}$. (Útmutatás. $f(t) = \int_t^{\infty} d\lambda$, ahol λ alkalmas mérték.)

147. Legyen g folytonosan differenciálható függvény, X pedig standard normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy $D^2(g(X)) \leq \mathbb{E}(g'(X)^2)$, ha a bal oldal véges. Mikor teljesül egyenlőség?

148. Legyen A pozitív valószínűségű esemény, X véges szórású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $|\mathbb{E}(X|A) - \mathbb{E}(X)| < D(X)\sqrt{\mathbb{P}(\overline{A})/\mathbb{P}(A)}$.

149. (*Teljes variáció.*) Az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ mérhető téren definiált λ előjeles mérték teljes variációja

$$|\lambda| = \sup\Big\{ \sum_n |\lambda(A_n)| : \{A_1, A_2, \ldots\} \text{ az } \mathcal{M} \text{ mérhető partíciója}\Big\}.$$

Legyenek P_n és P valószínűségi mértékek egy mérhető téren, amelyek abszolút folytonosak egy σ-véges λ mértékre. Jelölje f_n, illetve f a sűrűségfüggvényeket. Mutassuk meg, hogy

(a) $|P_n - P| = \int |f_n - f| d\lambda$;

(b) $f_n \to f$ λ-majdnem mindenütt pontosan akkor, ha $|P_n - P| \to 0$ (Scheffé tétele).

150. Mutassuk meg, hogy $|P - Q| \leq 2\sqrt{1 - \exp(-D(P||Q))}$ teljesül, ha P és Q valószínűségi mértékek.

151. Mutassuk meg, hogy

$$\min\{D(P||Q) : |P - Q| = 2d\} = \min\left\{x \log\frac{x}{x+d} + (1-x)\log\frac{1-x}{1-x-d} : 0 \leq x < 1 - d\right\}.$$

Konvergenciafajták

152. Mutassuk meg, hogy a majdnem mindenütt konvergencia nem topologizálható. (Útmutatás. Topologikus térben $x_n \to x$ pontosan akkor teljesül, ha (x_n) minden részsorozatából kiválasztható x-hez konvergáló további részsorozat.)

153. Tegyük fel, hogy a k dimenziós X_n vektorváltozók sztochasztikusan konvergálnak X-hez, amint $n \to \infty$. Legyen $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ tetszőleges függvény. Jelölje $C(h)$ ennek folytonossági pontjainak halmazát. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{P}(X \in C(h)) = 1$, akkor $h(X_n) \to h(X)$ sztochasztikusan.

154. Tegyük fel, hogy a k dimenziós X_n vektorváltozók eloszlásban konvergálnak X-hez, amint $n \to \infty$. Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ $l \times k$ méretű véletlen mátrixok, amelyek sztochasztikusan konvergálnak az A konstans mátrixhoz. Legyenek továbbá $b_1, b_2, \ldots$ a b konstans vektorhoz sztochasztikusan konvergáló l dimenziós véletlen vektorok. Mutassuk meg, hogy ekkor $A_n X_n + b_n$ eloszlásban tart $AX + b$-hez.

155. (*Lévy-metrika.*) Legyen $\mathcal{L}(F, G) = \inf\{\varepsilon > 0 : F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon \text{ minden } x\text{-re}\}$, ahol F és G eloszlásfüggvények. Mutassuk meg, hogy ez metrika, továbbá a valószínűségeloszlások ezzel a metrikával teljes szeparábilis metrikus teret alkotnak, melyben a konvergencia a mértékek gyenge konvergenciája.

156. Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_n$ és $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ valószínűségi mértékek a számegyenes Borel-halmazain. Bizonyítsuk be, hogy

(a) tetszőleges R valószínűségi mérték esetén $|P_1 * R - Q_1 * R| \le |P_1 - Q_1|$, és minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan R, hogy $|P_1 * R - Q_1 * R| \le \varepsilon$.

(b) $|P_1 * P_2 * \ldots * P_n - Q_1 * Q_2 * \ldots * Q_n| \le |P_1 - Q_1| + |P_2 - Q_2| + \ldots + |P_n - Q_n|$.

(c) Bizonyítsuk be ugyanezt variációs távolság helyett Lévy-metrikára is.

157. Legyen X és Y eloszlásfüggvénye F_X, illetve F_Y. A feladatban $\mathcal{L}$ a Lévy-metrikát, ϱ pedig a sztochasztikus konvergenciát metrizáló $\inf\{\varepsilon > 0 : \mathbb{P}(|X - Y| > \varepsilon) < \varepsilon\}$ távolságot jelöli. Mutassuk meg, hogy

(a) ha F_Y abszolút folytonos f_Y sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathcal{L}(F_X, F_Y) \le \sup|F_X - F_Y| \le (1 + \sup f_Y)\mathcal{L}(F_X, F_Y).$$

(b) ha $\mathbb{P}(|X - Y| > \varepsilon) \le \varepsilon$, akkor $\mathcal{L}(F_X, F_Y) \le \varepsilon$, azaz $\mathcal{L}(F_X, F_Y) \le \varrho(X, Y)$.

(c) $\mathcal{L}(F_X, F_Y) \le \mathbb{E}(|X - Y|^p)^{1/(p+1)}$, ahol $p > 0$.

(d) $\mathcal{L}(F_X, F_Y) \le \left(\int |F_X^{-1} - F_Y^{-1}|^p\right)^{1/(p+1)}$, ahol $p > 0$, és általánosított inverzek szerepelnek a jobb oldalon.

(e) $\mathcal{L}(F_X, F_Y) \le (\int |F - G|)^{1/2}$.

(f) ha $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, akkor $\mathcal{L}(F_X, F_Y) \le \big(D^2(X) + D^2(Y)\big)^{1/3}$.

158. Bizonyítsuk be, hogy X_n pontosan akkor tart X-hez sztochasztikusan, ha X_n feltételes eloszlása gyengén konvergál X feltételes eloszlásához, bármilyen pozitív valószínűségű feltétel esetén.

159. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ tetszőleges valószínűségi változók, amelyekre $\mathbb{E}(X_i) = 0$ és az (X_i^2) sorozat egyenletesen integrálható. Mutassuk meg, hogy $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ pontosan akkor tart 0-hoz sztochasztikusan, ha $\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} |\mathbb{E}(X_i S_n)| = 0$.

Karakterisztikus függvény

160. $^{(-)}$ Számítsuk ki a λ paraméterű exponenciális eloszlás karakterisztikus függvényét, azaz a $\varphi(t) = \mathbb{E}(\exp(itX))$ várható értéket minden $t \in \mathbb{R}$-re, ahol X exponenciális eloszlású.

161. Számítsuk ki az α rendű és λ paraméterű gamma-eloszlás karakterisztikus függvényét.

162. Legyen ξ n rendű p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy $\xi = \eta + \zeta$, ahol η és ζ független negatív binomiális eloszlású. Mit mondhatunk η és ζ rendjéről és paraméteréről?

163. Határozzuk meg a következő eloszlások karakterisztikus függvényét.

(a) $N(\mu, \sigma^2)$;

(b) $U(-1, 1)$;

(c) tetszőleges gamma-eloszlás;

(d) sűrűségfüggvénye: $f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$, ha $t \neq 0$;

(e) Cauchy-eloszlás.

164. (*Bernstein-tétel)* Legyenek X és Y független, azonos eloszlású és véges szórású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy $X + Y$ és $X - Y$ pontosan akkor függetlenek, ha X és Y normális eloszlású.

165. Legyenek X, Y, Z függetlenek. Tegyük fel, hogy X és Y várható értéke véges, továbbá $X + Z$ ugyanolyan eloszlású, mint $Y + Z$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.

Határeloszlások

166. $^{(+)}$ Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású, véges μ várható értékű valószínűségi változók. Jelölje $m(n)$ az $X_1 + \ldots + X_n$ összeg mediánját. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} m(n)/n = \mu$.

167. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ egész értékű valószínűségi változók, $a_n \to \infty$ pozitív számok. Tegyük fel, hogy majdnem minden valós t-re $\lim_{n\to\infty} a_n \mathbb{P}(X_n = [a_n t]) = f(t)$, ahol f sűrűségfüggvény. Mutassuk meg, hogy ekkor X_n/a_n határeloszlása éppen az f sűrűségfüggvényű eloszlás.

168. $^{(+)}$ Egy mozi első széksorában N hely található. A nézők egymás után foglalják el helyüket úgy, hogy mindegyik néző azonos valószínűséggel választ a még üres székek között. Legyen $\tau(N)$ az első olyan néző sorszáma, aki elsőként foglal el olyan helyet, amelyiknek a sor közepére nézve szimmetrikus párja már foglalt. Határozzuk meg a következő határeloszlást: $G(t) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big(\frac{\tau(N)}{\sqrt{N}} < t\big)$.

169. $^{(+)}$ Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, amíg mind fejekből, mind pedig írásokból legalább k számú nem lesz a dobások között. ν_k jelöli a szükséges dobásszámot. Számítsuk ki ν_k eloszlását és a $(\nu_k - 2k)/\sqrt{2k}$ sorozat határeloszlását, amint $k \to \infty$.

170. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású, $\mu > 0$ várható értékű és σ szórású nemnegatív valószínűségi változók. Legyen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, és $t > 0$ esetén $N(t) = \max\{k \geq 0 : S_k \leq t\}$. Számítsuk ki

$$\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}}$$

határeloszlását, amint $t \to \infty$.

171. Legyen X_n na rendű és λ paraméterű gamma-eloszlású valószínűségi változó.
   (a) Mi a határeloszlása az $n^{-1/2}(\lambda X_n - an)$ mennyiségnek $n \to \infty$ esetén?
   (b) Számítsuk ki $n^{-1/2}|X_n - n|$ várható értékét, ahol X_n eloszlása n rendű 1 paraméterű gamma-eloszlás. Mi ennek a határértéke $n \to \infty$ esetén? Vezessük le ebből a Stirling-formulát.

172. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók, és jelölje Y_n a maximumukat. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a_n(Y_n - a_n) < t) = \exp(-\exp(-t)),$$

ahol az a_n értéket $\varphi(a_n) = 1 - 1/n$ definiálja.

173. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású független valószínűségi változók, és jelölje Y_n a maximumukat. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n(1 - Y_n) > t) = e^{-t}.$$

Feltételes várható érték

174. $^{(-)}$ X és Y együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x + y)$, ha $x, y \in (0, \pi/2)$, és 0 máshol. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(X|Y)$ feltételes várható értéket.

175. $^{(-)}$ X és Y együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \frac{1}{\pi}\big(1 + \frac{x+y}{2}\big)$ az egységkörben, azon kívül pedig 0. Számítsuk ki az $\mathbb{E}(X|Y)$ feltételes várható értéket.

176. Legyenek X és Y független λ illetve μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az $(\max(X, Y)|\min(X, Y))$ feltételes várható értéket.

177. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású független valószínűségi változók, és jelölje $X_1^* \leq X_2^* \leq \ldots \leq X_n^*$ a nagyság szerint növekvő sorba rendezett értékeket (rendezett minta). Számítsuk ki a következő mennyiségeket.

   (a) $\mathbb{E}(X_1|X_n^*)$;

   (b) $\mathbb{E}(X_1^*|X_n^*)$ és $\mathbb{E}(X_n^*|X_1^*)$;

   (c) $\mathbb{E}(X_k^*|X_{k+1}^*)$ és $\mathbb{E}(X_{k+1}^*|X_k^*)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

178. (*Teljes szórásnégyzet tétele*) Legyen X valószínűségi vektorváltozó, $\mathcal{F}$ pedig σ-algebra. Mutassuk meg a teljes szórásnégyzet tételének alábbi változatát.

$$\Sigma(X) = \mathbb{E}(\Sigma(X|\mathcal{F})) + \Sigma(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})).$$

Itt $\Sigma(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^T]$ az X kovarianciamátrixa, és

$$\Sigma(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^T|\mathcal{F})]$$

a feltételes kovariancia.

179. Legyen X integrálható valószínűségi változó, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ σ-algebrák. Tegyük fel, hogy $\mathcal{G}$ független $\sigma(\mathcal{F}, X)$-től. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}(X|\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$.

180. Legyenek X, Y integrálható valószínűségi változók, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ σ-algebrák. Tegyük fel, hogy $\sigma(\mathcal{F}, X)$ független $\sigma(\mathcal{G}, Y)$-tól. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.