1. Az X valószínűségi változó a $[0, c]$ intervallumon veszi fel értékeit és ott sűrűségfüggvénye x^2. Határozzuk meg c értékét és annak valószínűségét, hogy $1 < X < 3$.

2. Az X valószínűségi változó legyen geometriai eloszlású $0 < p < 1$ paraméterrel, az Y valószínűségi változó pedig exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, azaz sűrűségfüggvénye $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}(x > 0)$.

   a) Mennyi $P(X \geq k + l | X \geq k)$, ha $k, l \in \mathbb{N}$?

   b) Mennyi $P(Y > t + s | Y > t)$, ha $s, t \geq 0$?

   c) Határozzuk meg X feltételes eloszlását az $\{X \leq k\}$ eseményre nézve ($k \in \mathbb{N}$).

   d) Határozzuk meg Y feltételes eloszlását az $\{Y \leq s\}$ eseményre nézve ($s > 0$).

   e) Határozzuk meg $1 - e^{-\lambda Y}$ eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

3. X az (a, b) intervallumból (a végpontok lehetnek végtelenek is) veszi fel értékeit, és ott eloszlásfüggvénye F, ami folytonos és szigorúan monoton. Milyen eloszlású az $F(X)$ valószínűségi változó? Határozzuk meg az eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét (ha van).

4. Számítógépünkbe csak egy véletlen függvény van beépítve. Ennek segítségével a $[0, 1]$ intervallumból tudunk véletlen számot generálni egyenletes eloszlás szerint. Ezt felhasználva hogyan lehet tetszőlegesen előírt F eloszlásfüggvényű véletlen számot előállítani?

5. Válasszunk egy pontot találomra, egyenletesen az egységnégyzetből, azaz $[0, 1] \times [0, 1]$- ből. Jelölje ξ a választott pont két koordinátájának az összegét. Számítsuk ki ξ eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

6. Legyen X és Y független, $P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2$, és Y egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumban. Határozzuk meg a következő változók eloszlásfüggvényét: $X + Y$, $\frac{1}{2}X + Y$, XY.

7. Nagyon gyakori, hogy egy részvény árfolyamáról feltételezik, hogy logaritmusa normális eloszlású. Vagyis ha X a részvény árfolyamát leíró valószínűségi változó, akkor $\log X$ eloszlásfüggvénye

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dt \qquad (\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0).$$

   Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.

8. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású ($\alpha > 0, \beta > 0$), ha eloszlásfüggvénye $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{\alpha}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$ A Piroska Biztosító felelősségi kárairól tudják, hogy millió forintban számolva $(1, 2)$ paraméterű Pareto-eloszlásúak. Ha egy kárról tudjuk, hogy meghaladta az 1 millió forintot, mennyi annak valószínűsége, hogy nem haladja meg a 3 millió forintot?

9. Mutassuk meg, hogy ha az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású, akkor $\ln(1 + X/\beta)$ exponenciális eloszlású α paraméterrel.

10. Legyen F folytonos eloszlásfüggvény, amire $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy $G(x) = 0$ (ha $x < 1$), $G(x) = F(x) - F(1/x)$ (ha $x > 1$) is eloszlásfüggvény.

11. A hidrológiában, távközlésben, biológiában és más területeken az egyik leggyakrabban alkalmazott eloszlás a gamma eloszlás. Egy valószínűségi változó gamma eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0; \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. $\lambda > 0$ az eloszlás paramétere, $\alpha > 0$ pedig a rendje. Jelölése $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Mutassuk meg, hogy az imént definiált f függvény valóban sűrűségfüggvény.

12. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, \pi)$ intervallumon. Mi $\mathrm{tg}(X)$ sűrűségfüggvénye?

13. Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F, a, b adott számok. Mi $aX + b$ eloszlásfüggvénye?

14. X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mi X^2 sűrűségfüggvénye?

15. U és V független valószínűségi változók f és g sűrűségfüggvénnyel. Határozzuk meg $U - V$ sűrűségfüggvényét.

16. Legyenek U és V független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Milyen eloszlású $U + V$?

17. A q szabadsági fokú χ^2-eloszlás q darab független standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzetösszegének eloszlása. Határozzuk meg a sűrűségfüggvényét.

18. X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a) az (X, Y) b) a $(2X + 3Y, -X + Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvényét.

19. X és Y függetlenek, eloszlásuk rendre $\Gamma(a, \lambda)$ és $\Gamma(b, \lambda)$. Bizonyítsuk be, hogy $X+Y$ és $X/(X+Y)$ függetlenek, és határozzuk meg az eloszlásukat.

20. Legyenek U_1 és U_2 a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású, független valószínűségi változók. Legyen
$$X_1 = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2), \qquad X_2 = \sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2).$$
Mutassuk meg, hogy X_1 és X_2 független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

21. X és Y legyenek független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mennyi annak valószínűsége, hogy a) $Y < |X|$? b) $2 < |X| + |Y| < 3$?

22. ξ es η legyenek független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg ξ/η eloszlását.

23. $X_1, \ldots, X_n$ független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Sorbarendezve az $X_1^* \leq X_2^* \leq \ldots \leq X_n^*$ sorozatot kapjuk belőlük.

    a) Határozzuk meg X_k^* eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

    b) Határozzuk meg $(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ együttes eloszlását, és mutassuk meg, hogy ez megegyezik
$$\left(\frac{Y_1}{Y_1 + \ldots + Y_{n+1}}, \frac{Y_1 + Y_2}{Y_1 + \ldots + Y_{n+1}}, \ldots, \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{Y_1 + \ldots + Y_{n+1}}\right)$$
    együttes eloszlásával, ahol $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ független, azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

24. A standard Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{C}{1+x^2}$.

    a) Legyen U a $[0, 2\pi]$ intervallumban egyenletes eloszlású. Mutassuk meg, hogy ekkor $X = \mathrm{tg}\, U$ eloszlása Cauchy. Mennyi C értéke?

    b) Legyen X Cauchy-eloszlású. Határozzuk meg $\log |X|$ sűrűségfüggvényét.

    c) Legyenek X és Y független és Cauchy-eloszlású. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $(X + Y)/2$ is Cauchy-eloszlású.

    d) Legyenek X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy X/Y Cauchy-eloszlású.

25. a) Legyen $\Omega = \mathbb{N}$ egy valószínűségi mező alaphalmaza. Vannak-e olyan $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók ezen a valószínűségi mezőn, melyek függetlenek, és mindegyiknek az eloszlása egy szabályos kockadobás eloszlása?

    b) Van-e olyan valószínűségi mező, melyen vannak olyan $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók, hogy mindegyiknek az eloszlása egy szabályos kockadobás eloszlása?

    c) Van-e olyan valószínűségi mező, melyen vannak olyan $Y_1, Y_2, \dots$ valószínűségi változók, hogy az $(Y_1, Y_2), (Y_3, Y_4), \dots$ párok függetlenek, minden Y_i eloszlása standard normális, és (Y_{2i-1}, Y_{2i}) kovarianciája 2 minden $i \geq 1$ egészre?

26. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ekkor $[X]$ és $\{X\}$ független. Milyen eloszlásúak?

27. Az X valószínűségi változó *koncentrációfüggvénye* $Q_X(t) = \sup_x P(x \leq X \leq x + t)$, $t \geq 0$. Mutassuk meg, hogy ha X és Y független, akkor $Q_{X+Y}(t) \leq Q_X(t)$.

28. Legyen X és Y független és egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumban, továbbá legyen $Z = \{X+Y\}$. Mutassuk meg, hogy ekkor X, Y, Z páronként függetlenek és azonos eloszlásúak, de közülük bármely kettő már egyértelműen meghatározza a harmadikat.

29. Számoljuk ki a standard normális eloszlás pozitív egész rendű momentumait.

30. Legyen X standard normális eloszlású. Mutassuk meg, hogy $c, t > 0$ esetén $P\big(Y > t + \frac{c}{t} \bigm| Y > t\big) < e^{-c}$. Mi a határértéke a bal oldalnak, ha $t \to \infty$?

31. Számoljuk ki az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$ sűrűségfüggvényű $N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlás várható értékét és szórásnégyzetét.

32. Legyen X és Y független és standard normális eloszlású. Számoljuk ki

$$(1 + X^2 + Y^2)^{-3/2} \exp\left(\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)\right)$$

    várható értékét.

33. Legyen X, Y és Z független és standard normális eloszlású. Határozzuk meg $\frac{X+YZ}{\sqrt{1+Z^2}}$ eloszlását.

34. Definiáljuk a gamma-függvényt a pozitív valós számokon a $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$ képlettel. Az $a > 0$ rendű és $\lambda > 0$ paraméterű gamma-eloszlás sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$.

    a) $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, speciálisan $\Gamma(n) = (n-1)!$.

    b) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

    c) Számítsuk ki a gamma-eloszlás várható értékét, szórását és tetszőleges rendű momentumait.

35. Pozitív a és b esetén a $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$ mennyiséget teljes bétaintegrálnak nevezzük, az $f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényű eloszlást pedig (a, b) paraméterű béta-eloszlásnak. Legyenek X és Y független, rendre a, ill. b rendű, és egyforma λ paraméterű gamma-eloszlású valószínűségi változók.

    a) Határozzuk meg $U = \frac{X}{X+Y}$ és $V = X + Y$ együttes sűrűségfüggvényét. Mutassuk meg, hogy U (a, b) paraméterű béta-eloszlású, V pedig $a + b$ rendű és λ paraméterű gamma-eloszlású, továbbá U és V függetlenek.

    b) Határozzuk meg (számolás nélkül) a teljes bétaintegrál értékét.

    c) Számítsuk ki a béta-eloszlás várható értékét, szórását és tetszőleges rendű momentumait.

36. Legyen X egységnyi paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Adjuk meg $|X-2|$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és várható értékét.

37. Legyenek X és Y független, azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $|X-Y|$ eloszlását.

38. Legyen X egyenletes eloszlású a $(0,2)$ intervallumon. Számítsuk ki az $R(X^2, X^3)$ korrelációs együtthatót.

39. Legyen X sűrűségfüggvénye $f(x) = 3x^2/7$, ha $1 < x < 2$, máshol pedig 0. Számítsuk ki X és $1/X$ korrelációs együtthatóját.

40. Legyenek az X és az Y valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, a sűrűségfüggvényük $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$, ha $0 < x < \pi$, és 0 máshol. Számítsuk ki az $R(X, X-2Y)$ korrelációs együtthatót.

41. Legyenek X és Y független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, rendre λ és μ paraméterrel. Számítsuk ki $\min\{X,Y\}$ és $\max\{X,Y\}$ korrelációs együtthatóját.

42. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ a $(0,1)$ intervallumban egyenletes eloszlású független valószínűségi változók, továbbá legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

    a) Mutassuk meg, hogy $n > 1$-re az S_n egészrészének és törtrészének a kovarianciája $-1/12$.

    b) Számítsuk ki a korrelációs együtthatójukat.

43. * A $[0,1]$ intervallumban választunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint, ez X. Az így keletkezett két intervallumban is választunk egy-egy pontot egyenletes eloszlás szerint, ezek Y és Z (így $Y \le X \le Z$). Milyen eloszlású $(X-Y)/(Z-Y)$?

44. Legyen P és Q (ugyanazon a mérhető téren értelmezett) két valószínűségeloszlás. Ekkor P és Q *információs divergenciája* a
$$D(P\|Q) = \int \log \frac{dP}{dQ}\, dP$$
mennyiség, ha $P \ll Q$, illetve $+\infty$, ha nem. Mutassuk meg, hogy $D(P\|Q) \ge 0$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $P = Q$.

45. Az f sűrűségfüggvényű eloszlás *metrikus entrópiájának* a $H(f) = -\int f(x)\log f(x)\,dx$ (ahol $0 \cdot \log 0 = 0$) mennyiséget nevezzük. Abszolút folytonos eloszlású X valószínűségi változó esetén jelölje $H(X)$ az eloszlás metrikus entrópiáját. Bizonyítsuk be, hogy

    a) $H(X+c) = H(X)$, $H(cX) = H(X) - \log|c|$,

    b) ha $D^2(X) = \sigma^2$, akkor $H(X) \le \frac{1}{2}(1 + \log 2\pi\sigma^2)$, és egyenlőség csak normális eloszlás esetén teljesül,

    c) ha $P(X \ge 0) = 1$ és $EX = \mu$, akkor $H(X) \le 1 + \log\mu$, és egyenlőség csak exponenciális eloszlás esetén teljesül,

    d) ha $P(a \le X \le b) = 1$, akkor $H(f) \le \log(b-a)$, és egyenlőség csak az egyenletes eloszlás esetén teljesül.

---

46. Mutassuk meg, hogy ha $c \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és a (ξ_n) valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál c-hez, akkor $\xi_n \to c$ sztochasztikusan is.

47. Mutassuk meg, hogy ha ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $\xi_n \to \xi$ eloszlásban és $\eta_n \to 0$ sztochasztikusan, akkor *a)* $\xi_n + \eta_n \to \xi$ eloszlásban; *b)* $\xi_n\eta_n \to 0$ sztochasztikusan.

48. $\xi_n \to \xi$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $\xi_n - \xi \to 0$ eloszlásban?

49. Mutassunk arra példát, hogy ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.

50. Mutassunk meg példákkal, hogy az L^1-beli konvergencia és az 1 valószínűségi konvergencia közül egyikből sem következik a másik.

51. Bizonyítsuk be, hogy az (X_n) valószínűségi változók sorozata pontosan akkor konvergál sztochasztikusan az X valószínűségi változóhoz, ha minden (X_{n_k}) részsorozatnak van olyan részsorozata, mely 1 valószínűséggel konvergál X-hez.

52. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, hogy $P\left(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ végtelen sok } n\text{-re }\right) = 0$.

---

53. Van-e olyan valószínűségi változó, amelynek karakterisztikus függvénye $\cos t$? Van-e olyan, amelynek karakterisztikus függvénye a) $\cos t$; b) $\frac{\sin t}{t}$; c) $\cos^2 t$? d) $e^{-|t|}$? e) $\frac{\sin t}{2t}$? f) $\frac{\sin(t/2)}{(t/2)}$?

54. Legyen $\varphi(t) = t + 1$, ha $-1 \leq t \leq 0$, $\varphi(t) = 1 - t$, ha $0 \leq t \leq 1$, és 0 különben. Van-e olyan valószínűségi változó, aminek a karakterisztikus függvénye φ?

55. Legyen Φ az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Van-e olyan valószínűségi változó, aminek karakterisztikus függvénye $|\Phi(t)|^2$?

56. Mutassuk meg, hogy ha létezik $t_0 \neq 0 : |\Phi(t_0)| = 1$, akkor a megfelelő eloszlás rácsos.

57. Az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $e^{-t^2/2}$. Milyen eloszlású X?

58. a) Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $X + Y$ karakterisztikus függvényét és eloszlását. b) Legyenek $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ és $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg $X + Y$ eloszlását.

59. a) Legyenek X, Y független $1/6$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki $X - Y$ karakterisztikus függvényét. b) Az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak. $X_1 + \ldots + X_n$ karakterisztikus függvénye $e^{-t^2/2}$. Milyen eloszlású X_1?

60. a) Legyen X λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a karakterisztikus függvényét. b) Bizonyítsuk be, hogy független Poisson-eloszlású valószínűségi változók összege is Poisson-eloszlású, és a paraméterek összeadódnak.

61. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó korlátlanul osztható, ha minden $n \geq 1$ egészhez van olyan Y_n valószínűségi változó, hogy n darab független, Y_n-nel azonos eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlása éppen X eloszlása. Bizonyítsuk be, hogy korlátlanul osztható valószínűségi változó karakterisztikus függvénye sehol sem 0.

---

62. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?

63. A ξ_n valószínűségi változó Gamma(n, λ) eloszlású. Mennyi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\lambda\xi_n - n}{\sqrt{n}} < 1,96\right)?$$

64. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók, eloszlásuk: $P(\xi_n = 1) = 1/n$, $P(\xi_n = 0) = 1 - 1/n$. Mihez tart eloszlásban $n \to \infty$ esetén

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - E(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{D(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}?$$

65. Minden pozitív egész n-re a $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,n}$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak, úgy, hogy

$$P(\xi_{n,k} = \sqrt{n}) = P(\xi_{n,k} = -\sqrt{n}) = 1/2n,\ P(\xi_{n,k} = 0) = (n-1)/n.$$

Mihez tart eloszlásban $n \to \infty$ esetén

$$\frac{\xi_{n,1} + \xi_{n,2} + \ldots + \xi_{n,n}}{\sqrt{n} D(\xi_{n,1})}?$$

66. n sofőr közösen használ egy autót úgy, hogy minden nap sorsolással döntik el, hogy ki vezessen aznap. Jelölje $\mu(n)$ azt a legkisebb természetes számot, amire igaz, hogy egy adott naptól kezdve sofőrök közül ennyi nap elteltével mindenki vezette az autót legalább egyszer. Határozzuk meg, hogy mihez tart $\frac{\mu(n) - n \log n}{n}$ eloszlásban $n \to \infty$ esetén.

67. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy minden x-re $n \to \infty$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\frac{4\sum_{k=1}^{n} kX_k - n^2}{n^{3/2}} < x\right) \to \Phi\left(\frac{3x}{2}\right).$$

68. Az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók legyenek független kockadobások eredményei. Számítsuk ki az alábbiakat:

a) $E(X_1 + X_2)$;

b) $\mathbb{E}(X_1 | X_1 + X_2 = 4)$;

c) $\mathbb{E}(X_1 | X_1 + X_2 = 7)$;

d) $\mathbb{E}(X_1 | X_1 + X_2)$;

e) $\mathbb{E}(X_1 | X_1 + \ldots + X_n)$;

f) $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3 | X_1)$;

g) $\mathbb{E}(X_1 X_2 | X_1)$;

h) $\mathbb{E}(X_1 X_2 | X_3 + X_4)$;

i) $\mathbb{E}(X_1^2 X_2 X_3 | X_2)$.

69. Legyenek X és Y független, azonos paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az alábbiakat: $\mathbb{P}(X = k | X < Y)$, $\mathbb{P}(X = k | X = Y)$, $\mathbb{P}(X = k | X + Y)$, $\mathbb{E}(X | X + Y)$.

70. $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók. $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$ minden n egészre, ahol $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mi lesz $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_n)$?

71. Az X, Y valószínűségi változók legyenek független λ paraméterű exponenciális eloszlásúak. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X | X + Y)$-t.

72. (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = e^{-y}$, ha $0 < x < y$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X|Y)$-t és $\mathbb{E}(Y|X)$-t.

73. (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \frac{12}{5}(x + y)$, ha $0 \le \frac{x}{2} \le y \le 1 - \frac{x}{2}$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y|X)$-t.

74. Legyen S_n bolyongás: 0-ból indulva minden lépésben a korábbiaktól függetlenül p valószínűséggel felfelé, $q = 1 - p$ valószínűséggel lefelé lépünk egyet. S_n azt jelöli, hogy hova érkezünk n lépés után.

a) Milyen c-re igaz, hogy $S_n - nc$ martingál?

b) Bizonyítsuk be, hogy $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ martingál.

c) Legyen τ az első olyan időpont, amikor a bolyongás elér 10-be vagy -5-be. Bizonyítsuk be, hogy τ megállási idő.

d) Mennyi annak valószínűsége, hogy $S_\tau = 10$, vagyis a bolyongás hamarabb ér 10-be, mint -5-be?

e) Határozzuk meg τ várható értékét.

75. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi folyamatok mindegyike martingál.

a) $S_n, S_n^2 - n, Y_n = t^n \left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^{S_n}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $0 < t < 1$ rögzített, (S_n) egyszerű szimmetrikus bolyongás.

b) $Z_n = 2^n \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

c) $Z_n = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n\lambda^2}{2}\right)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $\lambda > 0$ rögzített, $X_1, X_2, \ldots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg azt is, hogy

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left(\sum_{i=1}^k X_i - \frac{\alpha k}{2}\right) > \beta\right) \le e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

d) $Z_n = \left(\lambda^n \prod_{i=1}^n (X_{2i-1} + X_{2i})\right)^{-1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

76. Mutassuk meg, hogy $(I(\nu > n), \mathcal{F}_n)$ szupermartingál és $(I(\nu \le n), \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, ha ν megállási idő.

77. Legyenek az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, $E(X_n) = 0$, $D^2(X_n) = \sigma_n^2$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Mutassuk meg, hogy $S_n^2 - B_n^2$ martingál.

78. Egy részeg ember bolyong a síkon a lámpaoszloptól indulva. Minden lépése egységnyi hosszúságú, az iránya viszont véletlenszerű. Jelölje X_n a távolságát az oszloptól n lépés után. Mutassuk meg, hogy $X_n^2 - n$ martingál.

79. Egy urnában a piros és b kék golyó van. Minden húzásnál kihúzunk egy darabot véletlenszerűen egyenletesen, és c olyan színű golyót teszünk az urnába, amilyen színűt húztunk. Bizonyítsuk be, hogy a piros golyók aránya 1 valószínűséggel konvergál, amint a húzások száma végtelenhez tart. Mi a limesz eloszlása?

80. Mihez tart n szabályos kockadobás mértani közepe? Pontosabban legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, szabályos kockadobások. Mihez tart az $\sqrt[n]{X_1 \ldots X_n}$ sorozat 1 valószínűséggel, amint $n \to \infty$?

81. * Legyen X_n a következő tulajdonságú, $[0,1]$-beli értékeket felvevő valószínűségiváltozó-sorozat: $X_1 = a$ valamely $0 < a < 1$-re és

$$P\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\,\middle|\,\mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n; \quad P\left(X_{n+1} = \frac{X_n + 1}{2}\,\middle|\,\mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

Mutassuk meg, hogy X_n L_1-ben konvergens martingál. Adjuk meg X_∞ eloszlását.

82. Mutassuk meg, hogy ha az X_n szubmartingálra $E(X_n) = E(X_1)$ minden n-re, akkor X_n martingál.

83. Lehet-e egyszerre X_n és X_n^2 is martingál az $X_1, \ldots, X_n$ által generált σ-algebrára nézve?

84. Tekintsük a következő bolyongást: $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$, az X_i is az $1, -1$ értékeket veszi fel, de $P(X_i = X_{i-1}) = p$ és $P(X_i = -X_{i-1}) = 1-p$. Legyen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mutassuk meg, hogy $S_n + \frac{X_n}{2(1-p)}$ martingál.

85. Legyen $a, b > 0$, tegyük fel, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$ és $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál. Ekkor $(aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n)$ és $(\max(X_n, Y_n), \mathcal{F}_n)$ is szubmartingál. Fogalmazzuk meg az analóg állításokat szupermartingálokra!

86. Legyen X_n független valószínűségi változók sorozata a következő eloszlással: $P(X_n = 1/2) = P(X_n = 3/2) = 1/2$. Legyen $Y_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$. Mutassuk meg, hogy martingál. Hova konvergál?

87. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók az alábbi eloszlással:

$$P(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2}; \quad P\left(X_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Mutassuk meg, hogy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ martingál a természetes σ-algebrasorozatra nézve. Mihez tart?

88. * Tekintsük az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz egy véletlen permutációját, úgy, hogy minden permutáció egyformán valószínű. Mennyi annak valószínűsége, hogy a permutáció minden ciklusa belemetsz az $\{1, \ldots, k\}$ halmazba?

89. * Szindbád 100 hölgy közül választhat, akiket egymás után sorban lát, és az adott hölgy érkezése után azonnal el kell döntenie, hogy őt választja-e. Mi a legjobb stratégia, ha annak valószínűségét szeretné maximalizálni, hogy a legszebb hölgyet választja?