12. feladatsor 1. feladat befejezése

Cél:

$$A = \mathbb{E}\bigg(\int_0^1 \xi_s\eta_s ds\bigg) \le \Bigg(\bigg(\int_0^1 \mathbb{E}(\xi_s^2)ds\bigg)\cdot\bigg(\int_0^1 \mathbb{E}(\eta_s^2)ds\bigg)\Bigg)^{1/2} = D(f(X_1))\cdot D(g(Y_1)).$$

Alkalmazzuk a Fubini-tételt (ugyanez a számolás mutatja, hogy abszolút értéket véve a kettős integrál véges lenne, hiszen feltettük, hogy a szórások végesek):

$$A = \int_0^1 \mathbb{E}(\xi_s\eta_s)ds.$$

Az integrálon belül használjuk a várható értékre vonatkozó Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget:

$$A \le \int_0^1 \mathbb{E}\big(\xi_s^2\big)^{1/2}\mathbb{E}\big(\eta_s^2\big)^{1/2}ds = \int_0^1 a(s)b(s)ds.$$

Most az integrálásra és az $a(s) = \mathbb{E}\big(\xi_s^2\big)^{1/2}, b(s) = \mathbb{E}\big(\eta_s^2\big)^{1/2}$ függvényekre alkalmazva a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget:

$$A \le \bigg(\int_0^1 a(s)^2ds\cdot\int_0^1 b(s)^2ds\bigg)^{1/2} \le \bigg(\int_0^1 \mathbb{E}\big(\xi_s^2\big)\cdot\int_0^1 \mathbb{E}\big(\eta_s^2\big)ds\bigg)^{1/2}.$$

11. feladatsor 1/d. feladat

Az (a) és (b) feladatokból azt tudjuk, hogy $W^{(1)}$ Brown-mozgás a $\mathbb{Q}$ mérték alatt $[0,1]$-en, továbbá

$$W_t^{(2)} = \tilde W_t^{(2)} + \int_0^t \operatorname{sign} W_s^{(1)}ds, \tag{1}$$

ahol $\tilde W_t^{(2)}$ Brown-mozgás $\mathbb{Q}$ alatt a $[0,1]$-en.

Kérdés: $\operatorname{cov}_{\mathbb{Q}}(\tilde W_t^{(2)}, B_1)$, ahol $B_1 = \int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)}dW_s^{(2)}$.

Az első lépés a $\tilde W_0^{(2)}$ várható értékének kiszámítása $\mathbb{Q}$ szerint. Használjuk az (1) egyenletet, és azt, hogy $\tilde W_1^{(2)}$ Brown-mozgás $\mathbb{Q}$ alatt, tehát 0 várható értékű:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_1^{(2)}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\tilde W_1^{(2)} + \int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)}ds\bigg) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)}ds\bigg). \tag{2}$$

Mivel idő szerint integrálunk, és

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\int_0^1 |\operatorname{sign} W_s^{(1)}|ds\bigg) = 1 < \infty, \tag{3}$$

alkalmazhatjuk a Fubini-tételt a várható érték és az integrál felcserélésére. Tehát:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_1^{(2)}) = \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big(\operatorname{sign} W_s^{(1)}\big)ds = 0, \tag{4}$$

hiszen $W_s^{(1)}$ minden s-re nulla várható értékű normális eloszlás, a szimmetriája miatt az előjelének várható értéke 0.

A következő lépésben szétbontjuk B_1-et. Felhasználva, hogy az (1) egyenlet szerint $W_t^{(2)}$ Itô-folyamat a $\mathbb{Q}$ mérték alatt, és ezért az idő szerinti integrálnál a két integrandus összeszorzódik:

$$B_1 = \int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)}d\tilde W_s^{(2)} + \int_0^1 \operatorname{sign}^2 W_s^{(1)}ds. \tag{5}$$

Gyakorlaton szerepelt, hogy az előjel négyzetének integrálja 0-tól t-ig 1 valószínűséggel t-vel egyenlő. Ezért

$$B_1 = \int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(2)} + 1. \tag{6}$$

Tehát:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_1^{(2)} \cdot B_1) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(W_1^{(2)} \cdot \Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(2)} + 1\Big)\bigg) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(W_1^{(2)} \cdot \Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(2)}\Big)\bigg),$$

hiszen a (4) egyenlet szerint $W_1^{(2)}$ várható értéke a $\mathbb{Q}$ mérték szerint is 0. Most újra felhasználva az (1) egyenletet:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_1^{(2)} \cdot B_1) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\Big(\tilde{W}_1^{(2)} + \int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} ds\Big) \cdot \Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(2)}\Big)\bigg). \tag{7}$$

Itt az első tagban a szokásos módon integrálalakba írjuk át a $\tilde{W}_1^{(2)}$ folyamatot. Használhatjuk az Itô-izometriát, hiszen $\tilde{W}_1^{(2)}$ Brown-mozgás $\mathbb{Q}$ alatt, az integrandus pedig $\mathcal{S}$-beli (progresszíven mérhető és korlátos):

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(W_1^{(2)} \cdot \Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(2)}\Big)\bigg) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\Big(\int_0^1 1 d\tilde{W}_s^{(2)} \cdot \Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(2)}\Big)\bigg) =$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} ds\Big) = 0,$$

ugyanúgy, ahogy a (2) és a (4) egyenletekben a Fubini-tétel alapján láttuk. A második tag kiszámításához: legyen $\mathcal{F}$ a $W_u^{(1)}, 0 \le u \le 1$ által generált σ-algebra. Erre feltételes várható értéket véve és a teljes várható érték tételét alkalmazva:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} ds\Big) \cdot \Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(2)}\Big)\bigg) =$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(E_{\mathbb{Q}}\bigg(\Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} ds\Big) \cdot \Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(2)}\Big)\bigg|\mathcal{F}\bigg)\bigg) =$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\bigg(\Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} ds\Big) \cdot E_{\mathbb{Q}}\bigg(\Big(\int_0^1 \operatorname{sign} W_s^{(1)} d\tilde{W}_s^{(2)}\Big)\bigg|\mathcal{F}\bigg)\bigg).$$

Az első tényezőt a mérhetőség miatt emelhettük ki. A többváltozós Girsanov-tétel (vagy a többdimenziós Lévy-karakterizáció) szerint a $\mathbb{Q}$ mérték alatt $W_s^{(1)}$ és $\tilde{W}_s^{(2)}$ függetlenek. Ezért számolhatunk úgy, hogy $W_s^{(1)}$-et rögzítettnek véve számoljuk ki az integrál várható értékét, majd $W_s^{(1)}$-et behelyettesítjük. Azonban az integrandus tetszőleges $W_s^{(1)}$ trajektória esetén $\mathcal{S}$-beli, $\tilde{W}_t^{(2)}$ pedig Brown-mozgás $\mathbb{Q}$ alatt, tehát az integrál martingál, várható értéke 0. Így a feltételes várható érték és az egész kifejezés várható értéke is 0.

A legutóbbi két egyenletet összerakva a (7) egyenlettel azt kapjuk, hogy az $W_1^{(2)} \cdot B_1$ szorzat várható értéke 0. Mivel a (4) egyenlet szerint $W_1^{(2)}$ várható értéke is 0 a $\mathbb{Q}$ mérték szerint, a kovarianciára

$$\operatorname{cov}_{\mathbb{Q}}(\tilde{W}_t^{(2)}, B_1) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{W}_t^{(2)} \cdot B_1) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(W_1^{(2)}) \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_1) = 0 - 0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_1) = 0$$

adódik.

Legyenek a ξ_s, η_s folyamatok $\mathcal{S}$-beliek, W pedig Brown-mozgás. Ekkor a következők érvényesek a kvadratikus variációra:

$$\Big[\int \xi_s dW_s, \int \eta_s dW_s\Big]_t = \int_0^t \xi_s \cdot \eta_s ds.$$

$$\left[\int \xi_s dW_s, \int \eta_s ds\right]_t = 0.$$

$$\left[\int \xi_s ds, \int \eta_s ds\right]_t = 0.$$

A szorzat várható értékéről az Itô-izometria alapján az első esetben a következőt tudjuk állítani:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \xi_s dW_s \cdot \int_0^t \eta_s dW_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \xi_s \cdot \eta_s ds\right).$$

Azonban a második és harmadik esetben nincs hasonló összefüggés a kvadratikus variáció és a szorzat várható értéke között. Legyen például $\xi_s = \eta_s = 1$ minden s-re. Ekkor például a harmadik esetben

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \xi_s ds \cdot \int_0^t \eta_s ds\right) = \mathbb{E}(t^2) = t^2.$$