Valószínűségszámítás, földtudomány alapszak, 2016/2017. őszi félév

1. Hányféle sorrendben vonulhat ki a pályára egy focimeccsen a tizenegy kezdő játékos?

2. Két tizenhárom fős vízilabdacsapat mérkőzik egymással, a meccs előtt a különböző csapatba tartozók kezet fognak egymással. Hány kézfogás történik?

3. Egy vízilabdacsapat mérkőzésére 11 mezőnyjátékos érkezik. Hányféleképpen választható ki közülük a hat kezdő játékos? Ha figyelembe vesszük, hogy a csapattal jött a két kapus is, és a kezdő csapatba egy kapust is kell választani, hányféleképpen választható ki a hétfős kezdő csapat?

4. Hány lottószelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen öttalálatosunk?

5. Egy fiókban 10 egyforma pár kesztyű van. Találomra kiveszünk négy darabot.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy lesz köztük legalább egy pár?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két párt húzunk ki?
   c) Mennyi a valószínűsége, hogy húzunk jobbkezes kesztyűt?

6. Egy dobókockát többször feldobtunk, és felírtuk táblázatba, hogy mi hányszor fordult elő:

1	2	3	4	5	6
122	110	130	119	115	124

   Mennyi a relatív gyakorisága annak az eseménynek, hogy páros számot dobtunk? Mennyi a relatív gyakorisága annak, hogy 1-est dobunk? Mennyi ugyanezeknek az eseményeknek a valószínűsége, ha a dobókocka szabályos? Ebben az esetben (720-szor feldobjuk a dobókockát) mi az eseménytér?

7. Három pénzérmével dobunk, mindhárom dobás fej vagy írás lehet.

   (a) Mi az elemi események halmaza? Hány elemi esemény van?

   (b) Írjuk fel azt az eseményt, hogy az első két dobás különböző. Mi ennek az ellentett eseménye? Ha az érmék szabályosak, mennyi annak a valószínűsége, hogy az első két dobás különböző?

   (c) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer dobunk fejet?

   (d) Független-e az alábbi két esemény: az első két dobás különböző; pontosan kétszer dobunk fejet.

   (e) Független-e az alábbi két esemény: az első dobás fej; pontosan kétszer dobunk fejet.

8. Két kockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Tekintsük a következő eseményeket:
   A: a kék kockával kettest dobunk — B: legalább az egyik dobás kettes
   C: a két dobott szám összege 6 — D: pontosan egy ötöst dobunk
   E: a két dobott szám összege 7 — F: a piros kockával ötöst dobunk

   Független-e egymástól A és C? Független-e egymástól A és E? Független-e egymástól B és D? Függetlenek-e az A, C és F események?

9. Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy a piros kockával nagyobbat dobunk, mint a kékkel?

10. Mennyi a valószínűsége, hogy szabályos dobókockával hatszor dobva mind a hat szám előfordul?

11. Egy szabályos dobókockával dobunk háromszor egymás után.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer dobunk kettest?

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás hármas?

   (c) Mennyi a valószínűsége, hogy nem dobunk 4-nél nagyobb számot?

   (d) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege páratlan?

12. Hanna villamossal jár egyetemre. Minden reggel $1/2$ valószínűséggel négyes, $1/2$ valószínűséggel hatos villamos jön előbb. Feltételezzük, hogy a napok egymástól függetlenek. Mennyi annak valószínűsége, hogy egy hét alatt (hétfőtől péntekig) mindig négyessel jön? Mennyi annak valószínűsége, hogy pontosan kétszer jön négyessel? Mennyi annak valószínűsége, hogy pontosan háromszor jön négyessel?

13. Öt szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége a "full" dobásnak, azaz hogy lesz három egyforma szám, és a maradék kettő is egyforma, de nem mind az öt dobott szám azonos? Mennyi a valószínűsége, hogy mind az öt szám egyforma?

---

14. A holnapi csapadékmennyiség (milliméterben, kerekítve) $0,6$ valószínűséggel 0 mm, $0,3$ valószínűséggel 1 mm, $0,1$ valószínűséggel 2 mm. Írjuk fel a holnapi csapadékmennyiség eloszlását, és számítsuk ki a várható értékét és szórását.

15. Jelölje X a márciusi fagyos napok számát. Tegyük fel, hogy

$$\mathbb{P}(X=0)=0,3; \qquad \mathbb{P}(X=1)=0,4; \qquad \mathbb{P}(X=2)=0,2; \qquad \mathbb{P}(X=3)=0,1.$$

Ábrázoljuk X eloszlását. Mennyi a márciusi fagyos napok számának várható értéke, azaz $\mathbb{E}(X)$? Mennyi a márciusi fagyos napok számának szórása, azaz $D(X)$?

16. Egy dolgozaton 3 feladat lesz. Péter $2/3$ valószínűséggel mindhármat megoldja, $1/6$ valószínűséggel csak kettőt, $1/6$ valószínűséggel egyet. Legyen Y a Péter által megoldott feladatok száma a dolgozaton. Számítsuk ki Y várható értékét és szórását.

17. Öt dobókockával dobunk egyszerre. Jelölje X azt, hogy hány hatost dobtunk.
a) Mennyi $\mathbb{P}(X=5)$?
b) Mennyi $\mathbb{P}(X=4)$?
c) Mennyi $\mathbb{P}(X=3)$?
d) Milyen eloszlású X?
e) Mennyi a hatosok számának várható értéke?
f) Mennyi a hatosok számának szórása?

18. Bálint minden nap a többitől függetlenül 0,01 valószínűséggel késik el az egyetemről.
a) Mennyi annak valószínűsége, hogy egy hét (öt hétköznap) alatt pontosan kétszer késik?
b) Milyen eloszlású a novemberi késéseinek száma, ha novemberben 21 tanítási nap van?
c) Mennyi a novemberi késéseinek számának várható értéke?
d) Mennyi a novemberi késéseinek számának szórása?

19. Egy céllövő 70%-os valószínűséggel találja el a céltábla közepét, az egyes lövéseknél függetlenül. Határozzuk meg, hogy 25 lövésből mennyi a sikeres találatok számának várható értéke és szórása!

20. Budapesten 10 műszert helyeztünk el a légszennyezettség mérésére. Egy adott napon mindegyik $0,01$ valószínűséggel romlik el, ilyenkor nem kapunk aznap mérési adatot. A műszerek működése egymástól független. Jelölje Z, hogy a holnapi napon hány műszer romlik el. Számítsuk ki a $\mathbb{P}(Z=2)$ valószínűséget, illetve Z várható értékét és szórását.

21. Debrecenben számos műszert helyeztünk el a légszennyezettség mérésére. Tegyük fel, hogy az egy napon meghibásodó műszerek száma (amit Y-nal jelölünk), Poisson-eloszlású, és paramétere $0,1$. Számítsuk ki a $\mathbb{P}(Y=2)$ valószínűséget, illetve Y várható értékét és szórását.

22. Sokéves megfigyelések szerint egy évben átlagosan 3,42 alkalommal van jégeső. Feltételezzük, hogy a jégesők éves száma Poisson-eloszlású, és hogy a jégesők várható száma megegyezik a megfigyelt átlaggal.
a) Mennyi az egy év alatt bekövetkezett jégesők számának szórása?
b) Mennyi annak valószínűsége, hogy egy évben pontosan háromszor van jégeső?
c) Mennyi annak valószínűsége, hogy egy évben legalább négyszer van jégeső?

23. Egy boltban az egy óra alatt bejövő vevők száma 10 paraméterű Poisson-eloszlású. Mennyi a valószínűsége, hogy reggel 8 és 9 között legfeljebb ketten jönnek? Várhatóan hányan jönnek be reggel 8 és 9 között? Mennyi az ezalatt érkezők számának szórása?

24. Bálint minden nap a többitől függetlenül $0,05$ valószínűséggel késik el az iskolából. A harmadik késés után igazolatlan órát kap. Jelölje X, hogy hányadik tanítási napon késik el először, és Y, hogy hányadik tanítási napon kap először igazolatlan órát.

    (a) Mennyi $\mathbb{P}(X = 5)$, és mennyi $\mathbb{P}(Y = 5)$?

    (b) Mennyi X várható értéke és szórása?

    (c) Mennyi Y várható értéke és szórása?

25. Egy szabályos dobókockával dobunk. Jelölje X, hogy hányadszorra dobunk először egyest, és Y, hogy hányadik dobásnál jön ki a hatodik hatos. Számítsuk ki X és Y várható értékét és szórását! Mennyi $\mathbb{P}(X = 4)$?

26. Egy társasjátékban két kockával dobnak, a dobott számok összege számít. Jelölje Z azt, hogy hányadik dobásnál jön ki az első hetes. Mennyi $\mathbb{E}(Z)$ és $D(Z)$? Jelölje most Y azt, hogy hányadik dobás az első olyan, ahol hat a dobott számok összege. Mennyi $\mathbb{E}(Y)$ és $D(Y)$?

27. Az ötöslottón 1–90-ig számozott golyók közül húznak ki ötöt, visszatevés nélkül, minden számötöst azonos valószínűséggel választva. A szelvényen öt számra lehet tippelni. Mennyi annak valószínűsége, hogy pontosan két számot sikerül eltalálni? Mennyi annak valószínűsége, hogy pontosan négy számot sikerül eltalálni?

28. Négy piros és három kék golyó van egy zsákban, kihúzunk közülük egyszerre kettőt, véletlenszerűen. Mennyi annak valószínűsége, hogy húzunk kék golyót? És annak, hogy pontosan egy kéket húzunk?

29. Egy osztályban 16 fiú és 9 lány van. A tanár kisorsol négy felelőt (minden lehetséges négyes csoport egyforma valószínűséggel szerepel). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy lány fog felelni? Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két lány fog felelni? Mennyi a valószínűsége, hogy csak lányok felelnek?

30. Egy 32 lapos kártyapakliból, melyben nyolc piros lap van, egy játékhoz kiosztunk Annának öt, véletlenszerűen választott lapot (minden ötös csoport egyformán valószínű). Mennyi annak valószínűsége, hogy Anna kap legalább egy piros lapot? Mennyi annak valószínűsége, hogy pontosan két piros lapot kap?

31. (+) Egy szabályos dobókocka egyik oldalára 0-t, két másik oldalára 2-t, a többire 3-t írunk. Dobjuk fel a kockát ötször egymás után. Számítsuk ki
    a) a legkisebb dobott szám várható értékét;
    b) a dobott számok összegének várható értékét;
    c) a 0 dobások számának várható értékét.

---

32. Jelölje X, hogy holnap az égbolt látható részének mekkora hányadát borítják felhők. Tegyük fel, hogy ez a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Jelölje X eloszlásfüggvényét F, sűrűségfüggvényét f. Határozzuk meg a következő mennyiségeket:
    $\mathbb{P}(X \leq \frac{2}{5})$ $\quad$ $\mathbb{P}(X < \frac{2}{5})$ $\quad$ $F\left(\frac{2}{5}\right)$ $\quad$ $\mathbb{P}\left(X > \frac{2}{5}\right)$ $\quad$ $\mathbb{P}\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)$ $\quad$ $\mathbb{E}(X)$ $\quad$ $D(X)$

33. Csomagot várunk, a futár érkezésének időpontja egyenletes eloszlású a $[10, 15]$ intervallumon.
    a) Mennyi a valószínűsége, hogy a csomagot még délelőtt megkapjuk?
    b) Mennyi a valószínűsége, hogy a futár 10:15 és 11:45 között érkezik?
    d) Mennyi a futár érkezési idejének várható értéke?
    e) Mennyi a futár érkezési idejének szórása?
    f) Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > D(X))$; $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2D(X))$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 3D(X))$.

34. Van egy kőzetmintánk, aminek a porozitása $0,1$. A mérésünk azonban nem pontos, így azt feltételezzük, hogy a mérés során kapott eredmény $0,1$ várható értékű és $0,02$ szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy a mérés során $0,14$-nél kisebb értéket kapunk? Mennyi annak valószínűsége, hogy a mérési hiba $0,02$-nél több?

35. Tegyük fel, hogy a holnapi középhőmérséklet, X normális eloszlású valószínűségi változó 1 várható értékkel és 2 szórással (azaz $X \sim N(1,4)$), Celsius-fokban mérve.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy holnap $0°$ alatt lesz a középhőmérséklet?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy holnap $-1°C$ és $3°C$ között lesz a középhőmérséklet?
c) Határozzuk meg $E(X^2)$ értékét!
d) $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > D(X))$; $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2D(X))$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 3D(X))$.

Használhatjuk az alábbiakat: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, *valamint* $\Phi(0,5) = 0,6915$, $\Phi(1) = 0,8413$, $\Phi(2) = 0,9772$, $\Phi(3) = 0,9987$.

36. Korábbi méréseink alapján feltételezzük, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember testmagassága centiméterben mérve 176 várható értékű és 64 szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember
a) 176 cm-nél alacsonyabb?
b) 184 cm-nél alacsonyabb?
c) 168 cm-nél magasabb, de 184 cm-nél alacsonyabb?
d) 160 cm-nél magasabb, de 192 cm-nél alacsonyabb?
e) 192 cm-nél magasabb, feltéve, hogy 184 cm-nél magasabb?
f) 176 cm-nél alacsonyabb, feltéve, hogy 184 cm-nél alacsonyabb?

37. Jelölje Y egy izzó élettartamát években mérve, és tegyük fel, hogy Y exponenciális eloszlású, várható értéke 3.
a) Mennyi Y eloszlásának paramétere?
b) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az izzó legalább 3 évig működik.
c) Mennyi annak valószínűsége, hogy az izzó a második évben ég ki, azaz $\mathbb{P}(1 \le X \le 2)$?
d) Határozzuk meg az izzó élettartamának szórását, azaz $D(X)$-et.
e) Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > D(X))$; $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2D(X))$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 3D(X))$.

38. Megmérjük a befagyott Balaton jegének vastagságát (centiméterben) egy adott helyen, legyen ez a Z valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy Z exponenciális eloszlású 0,3 paraméterrel.
a) Mennyi a jégvastagság várható értéke és szórása?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy ráállhatunk a jégre, ha ehhez legalább 8 cm jég kell?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy a jég vastagsága 1 és 2 cm között van, azaz mennyi $\mathbb{P}(1 \le Z \le 2)$?

39. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f, ahol $f(x) = 2x$, ha $0 < x < 1$, és 0 különben.
a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(0 \le X < 1/2)$ és a $\mathbb{P}(1/4 \le X < 1/2)$ valószínűségeket.
b) Mennyi X várható értéke?
c) Mennyi $\mathbb{E}(X^2)$?
d) Mennyi X szórásnégyzete?

---

40. Egy 32 tagú osztályban a diákok angolt, németet vagy franciát tanulhatnak. Tudjuk, hogy angolul 20-an tanulnak, németül 12-en, franciául pedig 9-en. Angolul és németül egyszerre 5-en, németül és franciául egyszerre 3-an, angolul és franciául 2-en, és senki nem tanulja mind a három nyelvet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott diák legalább az egyik idegen nyelvet tanulja?

41. Az előrejelzés szerint Budapesten 40%, Szegeden 20% valószínűséggel fog esni az eső. Annak valószínűsége, hogy mindkét helyen esni fog, 15%.

(*a*) Mennyi annak valószínűsége, hogy legalább az egyik városban esni fog az eső?

(*b*) Feltéve, hogy Budapesten esik, mennyi a valószínűsége, hogy Szegeden is esik?

(c) Feltéve, hogy Szegeden esik, mennyi a valószínűsége, hogy Budapesten is esik?

42. Hanna minden nap 1/2 valószínűséggel négyes, 1/2 valószínűséggel hatos villamossal megy egyetemre. A napok egymástól függetlenek. Pénteken elmondja, hogy az öt hétköznap alatt pontosan kétszer jött hatossal. Mennyi a valószínűsége, hogy kedden hatos villamossal érkezett?

43. Háromszor dobunk szabályos dobókockával. Mennyi annak valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4? Feltéve, hogy a dobott számok összege 4, mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás 1-es?

44. Kétszer dobunk szabályos dobókockával. Feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos, mennyi a valószínűsége, hogy mindkét dobás hatos?

45. Bálintot kirándulni hívják szombatra. Esős időben 1/10 valószínűséggel megy el, felhős időben 4/5 valószínűséggel, napos időben 9/10 valószínűséggel. Az időjárás-előrejelzés szerint a hétvégén 20% valószínűséggel esős, 65% valószínűséggel felhős, 15% valószínűséggel napos idő lesz.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy Bálint a hétvégén elmegy a kirándulásra?
b) Bálint szombaton este írja, hogy nem ment kirándulni. Mennyi a valószínűsége, hogy esős idő volt a lakóhelyén aznap?

46. Tamás orvoshoz megy szűrővizsgálatra. A laboratóriumi mérés nem tökéletes: egészséges embereknél 2% valószínűséggel betegséget jelez, míg beteg embereknél 1% valószínűséggel nem mutatja ki a betegséget. Tegyük fel, hogy a betegség gyakorisága a teljes népességben 4%.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy Tamás betegségről szóló leletet fog kapni?

b) Tamás megkapja a betegségéről szóló leletét. Mennyi a valószínűsége, hogy Tamás beteg?

47. Egy gyárban három gépen gyártják a csavarokat. Az I. gépen a csavarok 25 %-a, a II. gépen a csavarok 40 %-a, a III. gépen a csavarok 35 %-a készül. Az egyes csavarok egymástól függetlenül selejtesek, az I. gépen minden csavar 4 % valószínűséggel selejtes, a II. gépen 5 %, a III.-on 2 % valószínűséggel selejtesek a csavarok.
a) Véletlenszerűen kiválasztunk egy csavart. Mennyi a valószínűsége, hogy selejtes?
b) Találtunk egy selejtes csavart. Mennyi a valószínűsége, hogy a II. gépen készült?

48. Tegyük fel, hogy egy országban az egy év alatt bekövetkező, 3-asnál erősebb földrengések száma Poisson-eloszlású $0,08$ paraméterrel. Feltéve, hogy 2017-ben legfeljebb három, 3-asnál erősebb földrengés lesz, mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen egy sem lesz?

49. Csomagot várunk, a futár 8 és 12 óra között érkezik, érkezésének időpontja egyenletes eloszlású ezen az intervallumon. Feltéve, hogy 10 óráig nem jött, mennyi a valószínűsége, hogy 11 óra előtt megérkezik? Feltéve, hogy 9 és 11 óra között jön, mennyi a valószínűsége, hogy 10 óra és 10 óra 30 között érkezik?

50. Tegyük fel, hogy az, hogy mostantól mennyi idő múlva lesz legközelebb 3-asnál erősebb földrengés egy adott városban, exponenciális eloszlású $0,04$ paraméterrel (években számolva). Mennyi a valószínűsége, hogy egy éven belül lesz 3-asnál erősebb földrengés? Feltéve, hogy mostantól 4 évig nincs ilyen erős földrengés, mennyi a valószínűsége, hogy mostantól számítva az ötödik évben viszont már lesz?

51. Két pénzérme van egy zsákban, melyek ránézésre megkülönböztethetetlenek. Az egyik szabályos, a másikkal azonban $\frac{2}{3}$ a fej, és $\frac{1}{3}$ az írás dobás valószínűsége. Bekötött szemmel kihúzzuk az egyik érmét, és dobunk vele kétszer egymás után.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy fejet és egy írást dobunk (tetszőleges sorrendben)?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy a szabálytalan érmét húztuk ki, ha mindkét dobás írás lett?

52. $^{(+)}$ Egy zsákban három pénzérme van, az elsővel 1/2, a másodikkal 1/4, a harmadikkal 4/5 a fej dobásának valószínűsége. Véletlenszerűen kihúzunk a három pénzérme közül egyet, mindhármat egyforma valószínűséggel választjuk, és dobunk hatszor a kihúzott pénzérmével. A hat dobásból

pontosan három lett fej. Mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a szabályos pénzérmét húztuk ki?

---

53. Egy dobozban három cédula van, 1-től 3-ig számozva. Kétszer húzunk visszatevéssel, a húzások egymástól függetlenek. Jelölje X az először, Y a másodszor húzott számot. Számítsuk ki
a) X és Y kovarianciáját;
b) X szórását;
c) $X+Y$ és Y kovarianciáját;
d) $X-Y$ és Y korrelációs együtthatóját.

54. Egy cukrászdában kis és nagy adagban árulnak fagyit. A kis adag ára 200, a nagy adag ára 300 forint. Jelölje X az egy nap alatt eladott kis adag, Y az eladott nagy adag fagyik számát. Feltételezzük, hogy X és Y egymástól független, Poisson-eloszlású, 80 paraméterrel. Számítsuk ki az egy nap alatt fagylaltot vásárlók számának és a napi, fagylalt eladásából származó bevételnek a korrelációs együtthatóját.

55. Egy osztályba 15 fiú és 18 lány jár. Tegyük fel, hogy a tanulók minden nap egymástól függetlenül 1/10 valószínűséggel hiányoznak az iskolából. Számítsuk ki a jövő pénteken hiányzó lányok és a jövő pénteki összes hiányzó számának kovarianciáját és korrelációs együtthatóját.

56. Egy helyen megmértük a hőmérsékletet két különböző műszerrel. Tegyük fel, hogy a mérési eredmények egymástól független, normális eloszlású valószínűségi változók 6 várható értékkel és 2 szórással. Legyen X az első mérés eredménye, Y a második mérés eredménye. Számítsuk ki a következő mennyiségeket: $\mathrm{cov}(X, X+Y), \mathrm{cov}(X, \frac{X+Y}{2})$, $\mathrm{cov}(X-Y, X+Y)$, $R(X, \frac{X+Y}{2})$.

57. Egy méréssorozatban a mérési eredményeket jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_5$. Mennyi az első mérésnek és a mérések átlagának korrelációs együtthatója, azaz $R\big(X_1, \frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}\big)$? Mennyi a korrelációs együttható, ha öt mérés helyett n mérést végzünk? A mérések függetlenek, és feltételezzük, hogy az egyes mérési eredmények eloszlása azonos (ami ugyanaz, mint hogy az eloszlásfüggvényük megegyezik).

58. Legyenek X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók 1 paraméterrel. Mennyi X és Y kovarianciája, illetve korrelációs együtthatója? Mennyi $X+Y$ és $X-Y$ kovarianciája? Mennyi $X+Y$ szórásnégyzete? Mennyi $X-Y$ szórásnégyzete?

59. Egy dobozban két cédula van, rajtuk 1 és 2 áll. Kétszer húzunk visszatevéssel, legyen X az először húzott szám, Y pedig a kihúzott számok maximuma. Számítsuk ki X és Y kovarianciáját és korrelációs együtthatóját.

---

60. Megmértük a hőmérsékletet három különböző műszerrel. Tegyük fel, hogy a mérési eredmények függetlenek, normális eloszlásúak. A hőmérséklet ezen a helyen 12 fok, és feltehetjük azt is, hogy egy megegyezik a mérés várható értékével. A mérések szórása 2. Mennyi a három mérés átlagának várható értéke és szórása? Milyen eloszlású a három mérés átlaga?

61. Egy adott mennyiség meghatározásához n mérést végzünk. Legyen X_i az i. mérés eredménye, ami 10 várható értékű 4 szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Legyen

$$Y_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$$

a mérések átlaga.
a) Mennyi Y_n várható értéke?
b) Mennyi Y_n szórása?
c) Milyen eloszlású Y_n?
d) Mennyi $\lim_{n\to} D(Y_n)$?

62. Legyen X Poisson-eloszlású 2015 paraméterrel. Bizonyítsuk be, hogy

$$P(X > 3015) \leq 0,67.$$

63. Legyen az X valószínűségi változó várható értéke 42, szórása 5. Lehetséges-e, hogy $\mathbb{P}(\ 35 < X < 49\ )$ kisebb 0,4-nél?

64. Adjunk felső becslést annak valószínűségére, hogy 1000 érmedobásból a fejek relatív gyakorisága legalább 0,6.

65. Egy műszer minden nap a többitől függetlenül p valószínűséggel romlik el. Jelölje X, hogy 1000 nap használat alatt hányszor romlik el.
a) Mennyi $\mathbb{E}(X)$, illetve $D(X)$?
b) Adjunk felső becslést az alábbi valószínűségekre: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > D(X)$; $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2D(X)$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 3D(X)$.

66. (+) Hány kísérlet kell ahhoz, hogy 0,95-nél nagyobb legyen a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság 0,15-nél kisebb hibával közelítse az esemény valószínűségét?

67. (+) Budapesten meg akarják állapítani, hogy a dohányzók mekkora arányban fordulnak elő. Ehhez megkérdeznek n embert úgy, hogy minden választásnál mindenki a többi kérdéstől függetlenül ugyanakkora esélylyel jöhet szóba, a többi választástól függetlenül. Milyen nagyra kell n-et választani, hogy a megkérdezettek között a dohányosok aránya legalább
a) 0,9 valószínűséggel 0,1-nél nem nagyobb hibával
b) 0,99 valószínűséggel 0,01-nél nem nagyobb hibával
közelítse meg a dohányosok valódi arányát?

Gyakorló feladatok

68. Kétszer dobunk szabályos dobókockával. Használjuk a következő jelöléseket az alábbi három eseményre: A: az első dobás legfeljebb 3; B a dobott számok összege 7; C a második dobás 5.

    (a) Független-e A és B?
    (b) Mennyi a $B \cup C$ esemény valószínűsége?
    (c) Mennyi az $A \cup B \cup C$ esemény valószínűsége?

69. Szabályos dobókockával dobunk háromszor egymás után.

    (a) Mennyi a valószínűsége, hogy nem dobunk sem 3-ast, sem 6-ost?
    (b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer dobunk hárommal osztható számot?

70. Egy focicsapat edzésén 3 angol, 5 olasz és 9 francia játékos vesz részt. A csapatorvos véletlenszerűen kiválaszt közülük négyet (minden lehetséges négyes csoportot azonos valószínűséggel választva), akiket ellenőrző vizsgálatra hív. Mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen olasz játékosnak sem kell részt vennie az orvosi vizsgálaton?

71. Jelölje Z, hogy Zsófi holnaptól kezdve hányadik tanítási napon késik el először az iskolából. Minden nap a többitől függetlenül $0,1$ valószínűséggel késik el. Számítsuk ki Z várható értékét és szórását.

72. Tegyük fel, hogy Gábort a jövő évben 0,7 valószínűséggel egyszer sem, 0,2 valószínűséggel egyszer, 0,1 valószínűséggel kétszer éri baleset biciklizés közben. Jelölje X, hogy jövőre hányszor szenved kerékpáros balesetet Gábor.

    (a) Számítsuk ki X várható értékét.
    (b) Számítsuk ki X szórását.

73. Tegyük fel, hogy a holnapi középhőmérséklet (Celsius-fokban mérve) normális eloszlású 6 várható értékkel és 1 szórással.

    (a) Mennyi annak valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet nem több 9 foknál?

(b) Mennyi annak valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet 5 foknál több, de 9 foknál kevesebb?

74. A szervizben két hároméves, egy ötéves és két hatéves autó áll. Az autószerelő véletlenszerűen kiválaszt egyet, mindet azonos valószínűséggel választva. Jelölje X a szerelésre kiválasztott autó életkorát (évben mérve).

    (a) Számítsuk ki X várható értékét, azaz $\mathbb{E}(X)$-t.

    (b) Számítsuk ki X szórását, azaz $D(X)$-t.

75. Egy budai iskola egy huszonöt fős osztályban mindenki a többiektől függetlenül $1/3$ valószínűséggel lakik Pesten. Jelölje Y a Pesten lakók számát ebben az osztályban.

    (a) Számítsuk ki Y várható értékét.

    (b) Számítsuk ki Y szórását.

76. Tegyük fel, hogy a holnapi csapadékmennyiség (milliméterben mérve) egyenletes eloszlású az $[1, 5]$ intervallumon.

    (a) Mennyi annak valószínűsége, hogy a holnapi csapadékmennyiség 2 és 4 mm közé esik?

    (b) Mennyi a holnapi csapadékmennyiség várható értéke?

77. Egy régi pénztárcában két darab egyforintos, három darab kétforintos és egy darab ötforintos érme van. Véletlenszerűen kihúzzuk az egyik érmét, úgy, hogy minden érmét egyenlő valószínűséggel választunk. Jelölje X, hogy hány forintot szerzünk a húzás során.

    (a) Számítsuk ki X várható értékét, azaz $\mathbb{E}(X)$-t.

    (b) Számítsuk ki X szórását, azaz $D(X)$-t.

78. Egy harmincfős osztályban mindenki a többiektől függetlenül $1/4$ valószínűséggel balkezes. Jelölje Y a balkezesek számát ebben az osztályban.

    (a) Számítsuk ki Y várható értékét.

    (b) Számítsuk ki Y szórását.

79. Tegyük fel, hogy a holnapi középhőmérséklet (Celsius-fokban mérve) egyenletes eloszlású a $[2, 8]$ intervallumon.

    (a) Mennyi annak valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet 5 és 7 fok közé esik?

    (b) Mennyi a holnapi középhőmérséklet várható értéke?

80. Viktorról eddigi szokásai alapján azt tudjuk, hogy minden nap 65% valószínűséggel biciklivel, 20% valószínűséggel villamossal, 15% valószínűséggel metróval megy munkába. Ha biciklizik, akkor 8% valószínűséggel késik el, ha villamosozik, akkor 10% valószínűséggel, ha metrózik, akkor 5% valószínűséggel.

    (a) Mennyi annak valószínűsége, hogy Viktor holnap elkésik a munkából?

    (b) Viktor ma késve érkezett. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy biciklivel jött reggel?

81. Legyenek X és Y független, normális eloszlású, 4 szórású valószínűségi változók. Számítsuk ki a $\mathrm{cov}(X, X + 3Y)$ mennyiséget.

82. Egy iskolában a sportolási szokásokat mérik fel. Legyen X a kosárlabdázó fiúk, Y pedig a kosárlabdázó lányok száma. Tegyük fel, hogy X és Y egymástól függetlenek, Poisson-eloszlásúak, és X paramétere 24, míg Y paramétere 16. Számítsuk ki a $\mathrm{cov}(Y, X + Y)$ mennyiséget.

83. Legyenek X és Y független, normális eloszlású, 3 szórású valószínűségi változók. Számítsuk ki a $\mathrm{cov}(X, 2X + Y)$ mennyiséget.