Valószínűségszámítás, földtudomány alapszak, 2015/2016. őszi félév

1. Hányféle sorrendben vonulhat ki a pályára egy focimeccsen a tizenegy kezdő játékos?

2. Két tizenhárom fős vízilabdacsapat mérkőzik egymással, a meccs előtt a különböző csapatba tartozók kezet fognak egymással. Hány kézfogás történik?

3. Hány lottószelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen öttalálatosunk?

4. Két érmével dobunk, mindkét dobás fej vagy írás lehet. Mi az elemi események halmaza? Hány esemény van? Írjuk fel azt az eseményt, hogy a két dobás különböző. Mi ennek az ellentett eseménye? Ha az érmék szabályosak, mennyi annak a valószínűsége, hogy különbözőt dobunk?

5. Egy dobókockát többször feldobtunk, és felírtuk táblázatba, hogy mi hányszor fordult elő:

1	2	3	4	5	6
122	110	130	119	115	124

   Mennyi a relatív gyakorisága annak az eseménynek, hogy páros számot dobtunk? Mennyi a relatív gyakorisága annak, hogy 1-est dobunk? Mennyi ugyanezeknek az eseményeknek a valószínűsége, ha a dobókocka szabályos? Ebben az esetben (720-szor feldobjuk a dobókockát) mi az eseménytér?

6. Két kockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Tekintsük a következő eseményeket:
   A: legalább az egyik dobás 2-es B: a két dobott szám összege 7 C: dobunk páros számot
   D: pontosan egy 5-öst dobunk E: a pirossal páratlant dobunk F: mindkét szám páratlan
   G: a kékkel ötöst dobtunk
   a) Hány eleműek a következő események? $B \cap G$ $F \cap A$ $B \cup C$ $\overline{C}$ $B \cup \overline{G}$
   b) Igaz-e, hogy $D \cap A \subset B$? Teljesül-e $B \subset A \cup D$?
   c) Mennyi az A, B, …, G események valószínűsége, ha a dobókockák szabályosak?

7. Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy a piros kockával nagyobbat dobunk, mint a kékkel?

8. Mennyi a valószínűsége, hogy szabályos dobókockával hatszor dobva mind a hat szám előfordul?

9. Öt szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége a "full" dobásnak, azaz hogy lesz három egyforma szám, és a maradék kettő is egyforma, de nem mind az öt dobott szám azonos? Mennyi a valószínűsége, hogy mind az öt szám egyforma?

10. Hanna villamossal jár az egyetemre. Minden reggel $1/2$ valószínűséggel négyes, $1/2$ valószínűséggel hatos villamos jön előbb, és több nap alatt is az összes lehetőség egyformán valószínű. Mennyi annak valószínűsége, hogy egy hét alatt (hétfőtől péntekig) mindig négyessel jön? Mennyi annak valószínűsége, hogy pontosan kétszer jön négyessel? Mennyi annak valószínűsége, hogy pontosan háromszor jön négyessel?

11. Egy fiókban 10 egyforma pár kesztyű van. Találomra kiveszünk négy darabot.
    a) Mennyi a valószínűsége, hogy lesz köztük legalább egy pár?
    b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két párt húzunk ki?
    c) Mennyi a valószínűsége, hogy húzunk jobbkezes kesztyűt?

12. Négy piros és három kék golyó van egy zsákban, kihúzunk közülük egyszerre kettőt, véletlenszerűen. Mennyi annak valószínűsége, hogy húzunk kék golyót? És annak, hogy pontosan egy kéket húzunk?

13. Egy osztályban 16 fiú és 9 lány van. A tanár kisorsol négy felelőt (minden lehetséges négyes csoport egyforma valószínűséggel szerepel). Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy lány fog felelni? Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két lány fog felelni? Mennyi a valószínűsége, hogy csak lányok felelnek?

14. Egy 32 lapos kártyapakliból, melyben nyolc piros lap van, kihúzunk találomra négy lapot. Mennyi annak valószínűsége, hogy húzunk piros lapot? Mennyi annak valószínűsége, hogy pontosan két piros lapot húzunk? Mi a válasz ezekre a kérdésekre, ha visszatevéssel húzunk négyszer?

15. Igaz-e, hogy ha A, B események, és $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$, akkor $A \subseteq B$?

---

16. Egy 32 tagú osztályban a diákok angolt, németet vagy franciát tanulhatnak. Tudjuk, hogy angolul 20-an tanulnak, németül 12-en, franciául pedig 9-en. Angolul és németül egyszerre 5-en, németül és franciául egyszerre 3-an, angolul és franciául 2-en, és senki nem tanulja mind a három nyelvet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott diák legalább az egyik idegen nyelvet tanulja?

17. Hanna és Bálint biciklizni mennek. Hanna 75%, Bálint 65% valószínűséggel visz magával javítókészletet. Annak valószínűsége, hogy egyikük sem felejti otthon a javítókészletet, 30%.
a) Mennyi annak valószínűsége, hogy legalább az egyikőjüknél lesz javítókészlet?
b) Feltéve, hogy Hannánál van javítókészlet, mennyi a valószínűsége, hogy Bálintnál is van?
c) Feltéve, hogy Bálintnál van javítókészlet, mennyi a valószínűsége, hogy Hannánál is van?

18. Hanna minden nap 1/2 valószínűséggel négyes, 1/2 valószínűséggel hatos villamossal jár egyetemre, (több nap alatt is minden lehetőség egyformán valószínű). Pénteken elmondja, hogy az öt hétköznap alatt pontosan kétszer jött hatossal. Mennyi a valószínűsége, hogy kedden hatos villamossal érkezett?

19. Kétszer dobunk szabályos dobókockával. Feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos, mennyi a valószínűsége, hogy mindkét dobás hatos?

20. Bálintot kirándulni hívják szombatra. Esős időben 1/10 valószínűséggel megy el, felhős időben 4/5 valószínűséggel, napos időben 9/10 valószínűséggel. Az időjárás-előrejelzés szerint a hétvégén 20% valószínűséggel esős, 65% valószínűséggel felhős, 15% valószínűséggel napos idő lesz.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy Bálint a hétvégén elmegy a kirándulásra?
b) Bálint szombaton este írja, hogy nem ment kirándulni. Mennyi a valószínűsége, hogy esős idő volt a lakóhelyén aznap?

21. Két pénzérme van egy zsákban, melyek ránézésre megkülönböztethetetlenek. Az egyik szabályos, a másikkal azonban $\frac{2}{3}$ a fej, és $\frac{1}{3}$ az írás dobás valószínűsége. Bekötött szemmel kihúzzuk az egyik érmét, és dobunk vele kétszer egymás után.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy fejet és egy írást dobunk (tetszőleges sorrendben)?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy a szabálytalan érmét húztuk ki, ha mindkét dobás írás lett?

22. Egy gyárban három gépen gyártják a csavarokat. Az I. gépen a csavarok 25 %-a, a II. gépen a csavarok 40 %-a, a III. gépen a csavarok 35 %-a készül. Az egyes csavarok egymástól függetlenül selejtesek, az I. gépen minden csavar 4 % valószínűséggel selejtes, a II. gépen 5 %, a III.-on 2 % valószínűséggel selejtesek a csavarok.
a) Véletlenszerűen kiválasztunk egy csavart. Mennyi a valószínűsége, hogy selejtes?
b) Találtunk egy selejtes csavart. Mennyi a valószínűsége, hogy a II. gépen készült?

23. $^{(+)}$ Egy zsákban három pénzérme van, az elsővel 1/2, a másodikkal 1/4, a harmadikkal 4/5 a fej dobásának valószínűsége. Véletlenszerűen kihúzunk a három pénzérme közül egyet, mindhármat egyforma valószínűséggel választjuk, és dobunk hatszor a kihúzott pénzérmével. A hat dobásból pontosan három lett fej. Mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a szabályos pénzérmét húztuk ki?

24. Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Tekintsük a következő eseményeket:
A: dobunk 1-est; B: az összeg 7; C: dobunk 6-ost; D: az első dobás 1-es.
Igaz-e, hogy A és B függetlenek? Igaz-e, hogy A és C függetlenek? Igaz-e, hogy az A, B, C események függetlenek? Igaz-e, hogy A és D függetlenek? Igaz-e, hogy B és D függetlenek?

25. Egy szabályos pénzérmét háromszor feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás fej, B az, hogy a második dobás írás, és C az, hogy a harmadik dobás fej. Igaz-e, hogy A, B, C függetlenek?

---

26. A holnapi csapadékmennyiség (milliméterben, kerekítve) $0,6$ valószínűséggel 0 mm, $0,3$ valószínűséggel 1 mm, $0,1$ valószínűséggel 2 mm. Írjuk fel a holnapi csapadékmennyiség eloszlását, és számítsuk ki a várható értékét és szórását.

27. Jelölje X a márciusi fagyos napok számát. Tegyük fel, hogy

$$\mathbb{P}(X=0)=0,3; \qquad \mathbb{P}(X=1)=0,4; \qquad \mathbb{P}(X=2)=0,2; \qquad \mathbb{P}(X=3)=0,1.$$

Ábrázoljuk X eloszlását. Mennyi a márciusi fagyos napok számának várható értéke, azaz $\mathbb{E}(X)$? Mennyi a márciusi fagyos napok számának szórása, azaz $D(X)$?

28. Öt dobókockával dobunk egyszerre. Jelölje X azt, hogy hány hatost dobtunk.
a) Mennyi $\mathbb{P}(X=5)$?
b) Mennyi $\mathbb{P}(X=4)$?
c) Mennyi $\mathbb{P}(X=3)$?
d) Milyen eloszlású X?
e) Mennyi a hatosok számának várható értéke?
f) Mennyi a hatosok számának szórása?
g) Mennyi a $\mathbb{P}(X=3|3\leq X\leq 5)$ valószínűség?

29. Bálint minden nap a többitől függetlenül 0,01 valószínűséggel késik el az egyetemről.
a) Mennyi annak valószínűsége, hogy egy hét (öt hétköznap) alatt pontosan kétszer késik?
b) Milyen eloszlású a novemberi késéseinek száma, ha novemberben 21 tanítási nap van?
c) Mennyi a novemberi késéseinek számának várható értéke?
d) Mennyi a novemberi késéseinek számának szórása?

30. Egy társasjátékban két kockával dobnak, a dobott számok összege számít. Jelölje Z azt, hogy hányadik dobásnál jön ki az első hetes. Mennyi $\mathbb{E}(Z)$ és $D(Z)$? Jelölje most Y azt, hogy hányadik dobás az első olyan, ahol hat a dobott számok összege. Mennyi $\mathbb{E}(Y)$ és $D(Y)$?

31. Egy boltban az egy óra alatt bejövő vevők száma 10 paraméterű Poisson-eloszlású. Mennyi a valószínűsége, hogy reggel 8 és 9 között legfeljebb ketten jönnek? Várhatóan hányan jönnek be reggel 8 és 9 között? Mennyi az ezalatt érkezők számának szórása?

32. Egy céllövő 70%-os valószínűséggel találja el a céltábla közepét, az egyes lövéseknél függetlenül. Határozzuk meg, hogy 25 lövésből mennyi a sikeres találatok számának várható értéke és szórása!

33. Egy szabályos dobókockával dobunk. Jelölje X, hogy hányadszorra dobunk először egyest, és Y, hogy hányadik dobásnál jön ki a hatodik hatos. Számítsuk ki X és Y várható értékét és szórását!

34. Egy 32 lapos magyar kártyából 6 lapot húzunk visszatevés nélkül. Határozzuk meg a kihúzott zöld lapok számának várható értékét és szórását!

35. Sokéves megfigyelések szerint egy évben átlagosan 3,42 alkalommal van jégeső. Feltételezzük, hogy a jégesők éves száma Poisson-eloszlású, és hogy a jégesők várható száma megegyezik a megfigyelt átlaggal.
a) Mennyi az egy év alatt bekövetkezett jégesők számának szórása?
b) Mennyi annak valószínűsége, hogy egy évben pontosan háromszor van jégeső?
c) Mennyi annak valószínűsége, hogy egy évben legalább négyszer van jégeső?

36. (+) Egy szabályos dobókocka egyik oldalára 0-t, két másik oldalára 2-t, a többire 3-t írunk. Dobjuk fel a kockát ötször egymás után. Számítsuk ki
a) a legkisebb dobott szám várható értékét;
b) a dobott számok összegének várható értékét;
c) a 0 dobások számának várható értékét.

---

37. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f, ahol $f(x) = 2x$, ha $0 < x < 1$, és 0 különben.
a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(0 \leq X < 1/2)$ és a $\mathbb{P}(1/4 \leq X < 1/2)$ valószínűségeket.
b) Mennyi X várható értéke?
c) Mennyi $\mathbb{E}(X^2)$?
d) Mennyi X szórásnégyzete?

38. Jelölje X, hogy holnap az égbolt látható részének mekkora hányadát borítják felhők. Tegyük fel, hogy $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Jelölje X eloszlásfüggvényét F, sűrűségfüggvényét f. Határozzuk meg a következő mennyiségeket:
$\mathbb{P}(X \leq \frac{2}{5})$ $\quad \mathbb{P}(X < \frac{2}{5})$ $\quad F\left(\frac{2}{5}\right)$ $\quad \mathbb{P}\left(X > \frac{2}{5}\right)$ $\quad \mathbb{P}\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)$ $\quad \mathbb{E}(X)$ $\quad D(X)$

39. Csomagot várunk, a futár érkezésének időpontja egyenletes eloszlású a $[10, 15]$ intervallumon.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy a csomagot még délelőtt megkapjuk?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy a futár 10:15 és 11:45 között érkezik?
c) 11 óra van, és még nem érkezett meg a futár. Mennyi a feltételes valószínűsége, hogy még 11:45 előtt megérkezik?
d) Mennyi a futár érkezési idejének várható értéke?
e) Mennyi a futár érkezési idejének szórása?
f) Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > D(X))$; $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2D(X))$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 3D(X))$.

40. Jelölje Y egy izzó élettartamát években mérve, és tegyük fel, hogy Y exponenciális eloszlású, várható értéke 3.
a) Mennyi Y eloszlásának paramétere?
b) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az izzó legalább 3 évig működik.
c) Mennyi annak valószínűsége, hogy az izzó a második évben ég ki, azaz $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$?
d) Határozzuk meg az izzó élettartamának szórását, azaz $D(X)$-et.
e) Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > D(X))$; $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2D(X))$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 3D(X))$.
f) Mennyi annak valószínűsége, hogy az izzó legalább 4 évig működik, feltéve, hogy az első két évben nem ég ki?
g) Mennyi annak valószínűsége, hogy az izzó legalább 12 évig működik, feltéve, hogy működésének első tíz évében nem ég ki?

41. Megmérjük a befagyott Balaton jegének vastagságát (centiméterben) egy adott helyen, legyen ez a Z valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy Z exponenciális eloszlású 0,3 paraméterrel.
a) Mennyi a jégvastagság várható értéke és szórása?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy ráállhatunk a jégre, ha ehhez legalább 8 cm jég kell?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy a jég vastagsága 1 és 2 cm között van, azaz mennyi $\mathbb{P}(1 \leq Z \leq 2)$?

42. Tegyük fel, hogy a holnapi középhőmérséklet, X normális eloszlású valószínűségi változó 1 várható értékkel és 2 szórással (azaz $X \sim N(1, 4)$), Celsius-fokban mérve.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy holnap fagypont alatt lesz a középhőmérséklet?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy holnap $-1°C$ és $3°C$ között lesz a középhőmérséklet?
c) Határozzuk meg $E(X^2)$ értékét!
d) $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > D(X))$; $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2D(X))$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 3D(X))$.

Használhatjuk az alábbiakat: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, *valamint* $\Phi(0,5) = 0,6915$, $\Phi(1) = 0,8413$, $\Phi(2) = 0,9772$, $\Phi(3) = 0,9987$.

43. Korábbi méréseink alapján feltételezzük, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember testmagassága centiméterben mérve 176 várható értékű és 64 szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember
a) 176 cm-nél alacsonyabb?
b) 184 cm-nél alacsonyabb?
c) 168 cm-nél magasabb, de 184 cm-nél alacsonyabb?

d) 160 cm-nél magasabb, de 192 cm-nél alacsonyabb?
e) 192 cm-nél magasabb, feltéve, hogy 184 cm-nél magasabb?
f) 176 cm-nél alacsonyabb, feltéve, hogy 184 cm-nél alacsonyabb?

---

44. Egy dobozban három cédula van, 1-től 3-ig számozva. Kétszer húzunk visszatevéssel, a húzások egymástól függetlenek. Jelölje X az először, Y a másodszor húzott számot. Számítsuk ki
a) X és Y kovarianciáját;
b) X szórását;
c) $X+Y$ és Y kovarianciáját;
d) $X-Y$ és Y korrelációs együtthatóját.

45. Egy cukrászdában kis és nagy adagban árulnak fagyit. A kis adag ára 200, a nagy adag ára 300 forint. Jelölje X az egy nap alatt eladott kis adag, Y az eladott nagy adag fagyik számát. Feltételezzük, hogy X és Y egymástól független, Poisson-eloszlású, 80 paraméterrel. Számítsuk ki az egy nap alatt fagylaltot vásárlók számának és a napi, fagylalt eladásából származó bevételnek a korrelációs együtthatóját.

46. Egy osztályba 15 fiú és 18 lány jár. Tételezzük fel, hogy a tanulók minden nap egymástól függetlenül 1/10 valószínűséggel hiányoznak az iskolából. Számítsuk ki a jövő pénteken hiányzó lányok és a jövő pénteki összes hiányzó számának kovarianciáját és korrelációs együtthatóját.

47. Legyenek X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók 1 paraméterrel. Mennyi X és Y kovarianciája, illetve korrelációs együtthatója? Mennyi $X+Y$ és $X-Y$ kovarianciája? Mennyi $X+Y$ szórásnégyzete? Mennyi $X-Y$ szórásnégyzete?

48. Egy dobozban két cédula van, rajtuk 1 és 2 áll. Kétszer húzunk visszatevéssel, legyen X az először húzott szám, Y pedig a kihúzott számok maximuma. Számítsuk ki X és Y kovarianciáját és korrelációs együtthatóját.

49. Egy helyen megmértük a hőmérsékletet két különböző műszerrel. Tegyük fel, hogy a mérési eredmények egymástól független, normális eloszlású valószínűségi változók 6 várható értékkel és 2 szórással. Legyen X az első mérés eredménye, Y a második mérés eredménye. Számítsuk ki a következő mennyiségeket: $\mathrm{cov}(X, X+Y), \mathrm{cov}(X, \frac{X+Y}{2})$, $\mathrm{cov}(X-Y, X+Y)$, $R(X, \frac{X+Y}{2})$.

---

50. Megmértük a hőmérsékletet három különböző műszerrel. Tegyük fel, hogy a mérési eredmények függetlenek, normális eloszlásúak. A hőmérséklet ezen a helyen 12 fok, és feltehetjük azt is, hogy egy megegyezik a mérés várható értékével. A mérések szórása 2. Mennyi a három mérés átlagának várható értéke és szórása? Milyen eloszlású a három mérés átlaga?

51. Egy adott mennyiség meghatározásához n mérést végzünk. Legyen X_i az i. mérés eredménye, ami 10 várható értékű 4 szórású normális eloszlású valószínűségi változó. Legyen

$$Y_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$$

a mérések átlaga.
a) Mennyi Y_n várható értéke?
b) Mennyi Y_n szórása?
c) Milyen eloszlású Y_n?
d) Mennyi $\lim_{n\to} D(Y_n)$?

52. Legyen X Poisson-eloszlású 2015 paraméterrel. Bizonyítsuk be, hogy

$$P(X > 3015) \leq 0,67.$$

53. Legyen az X valószínűségi változó várható értéke 42, szórása 5. Lehetséges-e, hogy $P(\ 35 < X < 49\ )$ kisebb 0,4-nél?

54. Adjunk felső becslést annak valószínűségére, hogy 1000 érmedobásból a fejek relatív gyakorisága legalább 0,6.

55. Egy műszer minden nap a többitől függetlenül p valószínűséggel romlik el. Jelölje X, hogy 1000 nap használat alatt hányszor romlik el.
a) Mennyi $\mathbb{E}(X)$, illetve $D(X)$?
b) Adjunk felső becslést az alábbi valószínűségekre: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > D(X))$; $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2D(X))$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 3D(X))$.

56. (+) Hány kísérlet kell ahhoz, hogy 0,95-nél nagyobb legyen a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság 0,15-nél kisebb hibával közelítse az esemény valószínűségét?

57. (+) Budapesten meg akarják állapítani, hogy a dohányzók mekkora arányban fordulnak elő. Ehhez megkérdeznek n embert úgy, hogy minden választásnál mindenki a többi kérdéstől függetlenül ugyanakkora esélylyel jöhet szóba, a többi választástól függetlenül. Milyen nagyra kell n-et választani, hogy a megkérdezettek között a dohányosok aránya legalább
a) 0,9 valószínűséggel 0,1-nél nem nagyobb hibával
b) 0,99 valószínűséggel 0,01-nél nem nagyobb hibával
közelítse meg a dohányosok valódi arányát?