1. Egy érmével dobunk kétszer egymás után, és ha mindkétszer fej jön ki, harmadszor is dobunk. Az elemi események halmaza – a kapott dobássorozatoknak megfelelően – legyen

$$\Omega = \{\omega_{FI}, \omega_{II}, \omega_{IF}, \omega_{FFF}, \omega_{FFI}\} .$$

   Tehát például ω_{FI} annak felel meg, hogy elsőre fejet, másodszorra írást dobtunk.
   a) Írjuk fel azt az eseményt, hogy dobtunk legalább két fejet. Hány elemű ez az esemény? (6 pont)
   b) Legyen $P(\{\omega_{FFI}\}) = P(\{\omega_{FFF}\}) = 1/8$, a többi három elemi esemény egyformán valószínű. Mennyi annak valószínűsége, hogy legalább két fejet dobunk? (8 pont)

2. Egy fiókban tíz jobbkezes és hat balkezes kesztyű van. Visszatevés nélkül húzunk négyet. Minden húzás egyformán valószínű.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy csak jobbkezes kesztyűt húzunk? (6 pont)
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy két balkezest és két jobbkezest húzunk? (8 pont)

3. Egy szabályos dobókockával dobunk háromszor egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik dobás osztható hárommal? (10 pont)

4. Egy szabályos és egy szabálytalan dobókockánk van. A szabálytalannal 1/5 a hatos dobás valószínűsége. Egyforma valószínűséggel kiválasztjuk az egyik kockát, és dobunk vele.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy hatost dobunk? (6 pont)
   b) Mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a szabályos kockával dobtunk, feltéve, hogy a dobás hatos lett? (6 pont)

A dolgozaton összesen 50 pontot lehet elérni. Az egyes feladatok pontszámai a szövegük mellett láthatók.

Az elégséges határa 24 pont. Aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a szorgalmi időszak utolsó hetében vagy a vizsgaidőszak első hetében írhat pótzárthelyit. A várható ponthatárok: 48, 61, 73, 85.

Az eredmények az ETR infosheet rovatában lesznek olvashatók az őszi szünet után. A feladatok megoldása a következő honlapon lesz elérhető, szintén az őszi szünet után:
http://www.cs.elte.hu/ agnes/gyak

1. Egy szabályos dobókockával dobunk háromszor egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik dobás osztható hárommal? (10 pont)

2. Egy fiókban kilenc jobbkezes és öt balkezes kesztyű van. Visszatevés nélkül húzunk négyet. Minden húzás egyformán valószínű.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy csak jobbkezes kesztyűt húzunk? (6 pont)
b) Mennyi a valószínűsége, hogy két balkezest és két jobbkezest húzunk? (8 pont)

3. Egy szabályos és egy szabálytalan dobókockánk van. A szabálytalannal 1/4 az egyes dobás valószínűsége. Egyforma valószínűséggel kiválasztjuk az egyik kockát, és dobunk vele.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy egyest dobunk? (6 pont)
b) Mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a szabályos kockával dobtunk, feltéve, hogy a dobás egyes lett? (6 pont)

4. Egy érmével dobunk kétszer egymás után, és ha mindkétszer fej jön ki, harmadszor is dobunk. Az elemi események halmaza – a kapott dobássorozatoknak megfelelően – legyen
$$\Omega = \{\omega_{FI}, \omega_{II}, \omega_{IF}, \omega_{FFF}, \omega_{FFI}\}.$$
Tehát például ω_{FI} annak felel meg, hogy elsőre fejet, másodszorra írást dobtunk.
a) Írjuk fel azt az eseményt, hogy dobtunk legalább két írást. Hány elemű ez az esemény? (6 pont)
b) Legyen $P(\{\omega_{FFI}\}) = P(\{\omega_{FFF}\}) = 1/8$, a többi három elemi esemény egyformán valószínű. Mennyi annak valószínűsége, hogy legalább két írást dobunk? (8 pont)

A dolgozaton összesen 50 pontot lehet elérni. Az egyes feladatok pontszámai a szövegük mellett láthatók.

Az elégséges határa 24 pont. Aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a szorgalmi időszak utolsó hetében vagy a vizsgaidőszak első hetében írhat pótzárthelyit. A várható ponthatárok: 48, 61, 73, 85.

Az eredmények az ETR infosheet rovatában lesznek olvashatók az őszi szünet után. A feladatok megoldása a következő honlapon lesz elérhető, szintén az őszi szünet után:
http://www.cs.elte.hu/ agnes/gyak

Valószínűségszámítás **1. zárthelyi feladatsor** 2010. október 13.

1. Egy oktató minden diákot 3/5 valószínűséggel enged át a vizsgán, ha jókedvű, és minden diákot 1/2 valószínűséggel enged át a vizsgán, ha rosszkedvű. Egy adott napon egyforma valószínűséggel jó– és rosszkedvű. Mennyi a valószínűsége, hogy ezen a napon egy adott diák megfelel a vizsgán? (8 pont)

2. Egy fiókban nyolc fekete és hat barna zokni van. Kihúzunk közülük visszatevés nélkül négyet. Minden lehetséges húzás egyformán valószínű.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy húzunk fekete zoknit? (6 pont)
b) Mennyi a valószínűsége, hogy ugyanannyi fekete és barna zoknit húzunk? (8 pont)

3. Szabályos pénzérmével négyszer dobunk egymás után. Tekintsük a következő eseményeket. A : pontosan kétszer dobunk írást; B : dobunk fejet és írást is; C: dobunk legalább egy írást.
a) Határozzuk meg A valószínűségét. (6 pont)
b) Határozzuk meg $A \cup B \cup C$ valószínűségét. (10 pont)

4. Egy szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után. Mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a két dobás összege nyolc, arra az eseményre nézve, hogy a két dobás összege páros? (12 pont)

A dolgozaton összesen 50 pontot lehet elérni. Az egyes feladatok pontszámai a szövegük mellett láthatók.

Az elégséges határa 24 pont. Aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a szorgalmi időszak utolsó hetében vagy a vizsgaidőszak első hetében írhat pótzárthelyit. A várható ponthatárok: 48, 61, 73, 85.

Az eredmények az ETR infosheet rovatában lesznek olvashatók az őszi szünet után. A feladatok megoldása a következő honlapon lesz elérhető, szintén az őszi szünet után:
http://www.cs.elte.hu/ agnes/gyak

1. Szabályos pénzérmével négyszer dobunk egymás után. Tekintsük a következő eseményeket. A : pontosan kétszer dobunk fejet; B : dobunk fejet és írást is; C: dobunk legalább egy fejet.
   a) Határozzuk meg A valószínűségét. (6 pont)
   b) Határozzuk meg $A \cup B \cup C$ valószínűségét. (10 pont)

2. Egy szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után. Mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a két dobás összege hat, arra az eseményre nézve, hogy a két dobás összege páros? (12 pont)

3. Egy fiókban tíz fekete és hét barna zokni van. Kihúzunk közülük visszatevés nélkül négyet. Minden lehetséges húzás egyformán valószínű.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy húzunk fekete zoknit? (6 pont)
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy ugyanannyi fekete és barna zoknit húzunk? (8 pont)

4. Egy oktató minden diákot 4/5 valószínűséggel enged át a vizsgán, ha jókedvű, és minden diákot 2/3 valószínűséggel enged át a vizsgán, ha rosszkedvű. Egy adott napon egyforma valószínűséggel jó– és rosszkedvű. Mennyi a valószínűsége, hogy ezen a napon egy adott diák megfelel a vizsgán? (8 pont)

A dolgozaton összesen 50 pontot lehet elérni. Az egyes feladatok pontszámai a szövegük mellett láthatók.

Az elégséges határa 24 pont. Aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a szorgalmi időszak utolsó hetében vagy a vizsgaidőszak első hetében írhat pótzárthelyit. A várható ponthatárok: 48, 61, 73, 85.

Az eredmények az ETR infosheet rovatában lesznek olvashatók az őszi szünet után. A feladatok megoldása a következő honlapon lesz elérhető, szintén az őszi szünet után:
http://www.cs.elte.hu/ agnes/gyak

1. Egy érmével dobunk kétszer egymás után, és ha mindkétszer fej jön ki, harmadszor is dobunk. Az elemi események halmaza – a kapott dobássorozatoknak megfelelően – legyen

$$\Omega = \{\omega_{FI}, \omega_{II}, \omega_{IF}, \omega_{FFF}, \omega_{FFI}\}.$$

Tehát például ω_{FI} annak felel meg, hogy elsőre fejet, másodszorra írást dobtunk.
a) Írjuk fel azt az eseményt, hogy dobtunk legalább két fejet. Hány elemű ez az esemény? (6 pont)
b) Legyen $P(\{\omega_{FFI}\}) = P(\{\omega_{FFF}\}) = 1/8$, a többi három elemi esemény egyformán valószínű. Mennyi annak valószínűsége, hogy legalább két fejet dobunk? (8 pont)

a) Az a két dobássorozat jó, amikor az első két dobás fej: $\{\omega_{FFF}, \omega_{FFI}\}$. Az esemény kételemű.

b) Az elemi események kizáróak, és kizáró események uniójának valószínűsége a valószínűségeik összege:

$$P(\omega_{FFF}, \omega_{FFI}) = P(\omega_{FFF}) + P(\omega_{FFI}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

2. Egy fiókban tíz jobbkezes és hat balkezes kesztyű van. Visszatevés nélkül húzunk négyet. Minden húzás egyformán valószínű.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy csak jobbkezes kesztyűt húzunk? (6 pont)
b) Mennyi a valószínűsége, hogy két balkezest és két jobbkezest húzunk? (8 pont)

a) A visszatevéses mintavételre vonatkozó összefüggést használhatjuk. 16 kesztyű közül húzunk négyet, így $\binom{16}{4}$ egyformán valószínű elemi esemény (húzás) van. Amikor csak jobbkezes kesztyűt húzunk, 10 közül kell négy különbözőt kiválasztani, ez $\binom{10}{4}$ elemi esemény. Vagyis mivel az elemi események egyformán valószínűek, annak valószínűsége, hogy csak jobbkezes kesztyűt húzunk:

$$\frac{\binom{10}{4}}{\binom{16}{4}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13} \approx 0,1154.$$

b) A visszatevéses mintavételre vonatkozó összefüggés továbbra is használható. Az összes elemi esemény száma $\binom{16}{4}$. Két jobbkezes és két balkezes kesztyűt kiválasztani $\binom{10}{2} \cdot \binom{6}{2}$-féleképpen lehet (a húzás sorrendjét nem vettük figyelembe itt sem). Vagyis annak valószínűsége, hogy két jobb– és két balkezes kesztyűt húzunk:

$$\frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{16}{4}} \approx 0,3709.$$

3. Egy szabályos dobókockával dobunk háromszor egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik dobás osztható hárommal? (10 pont)

A hatoldalú dobókockával $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$-féle három dobásból álló sorozatot kaphatunk. Mivel a kocka szabályos, ezek egyformán valószínűek. Olyan dobássorozat, amelyben egyik szám sem osztható hárommal, $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ darab van, hiszen minden dobás négyféle lehet. Ezel alapján kapjuk annak valószínűségét, hogy legalább az egyik dobás osztható hárommal:

$$\frac{216 - 64}{216} = \frac{19}{27} \approx 0,7037.$$

4. Egy szabályos és egy szabálytalan dobókockánk van. A szabálytalannal 1/5 a hatos dobás valószínűsége. Egyforma valószínűséggel kiválasztjuk az egyik kockát, és dobunk vele.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy hatost dobunk? (6 pont)

b) Mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a szabályos kockával dobtunk, feltéve, hogy a dobás hatos lett? (6 pont)

a) Használjuk az alábbi jelöléseket. A az az esemény, hogy hatost dobunk, B az az esemény, hogy a szabályos kockát húztuk. B és $\overline{B}$ teljes eseményrendszer, hiszen uniójuk a teljes eseménytér, metszetük üres (vagyis mindig vagy a szabálytalan, vagy a szabályos kockával dobunk). Mivel egyforma eséllyel választunk kockát, mindkét esemény valószínűsége 1/2, ami pozitív. Így használhatjuk a teljes valószínűség tételét az A eseménnyel. Tudjuk, hogy $P\left(A|B\right) = 1/6$, míg $P\left(A|\overline{B}\right) = 1/5$. Ezek alapján

$$P\left(A\right) = P\left(A|B\right)P\left(B\right) + P\left(A|\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{60} \approx 0,1833.$$

b) Az előző részben felsorolt feltételek teljesülnek, és beláttuk, hogy $P\left(A\right)$ is pozitív. Vagyis Bayes tétele használható a feltételes valószínűség kiszámítására:

$$P\left(B|A\right) = \frac{P\left(A|B\right)P\left(B\right)}{P\left(A|B\right)P\left(B\right) + P\left(A|\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{11}{60}} = \frac{5}{11} \approx 0,4545.$$

A másik feladatsorra a megoldások menete hasonló, a végeredmények:

1. $19/27 \approx 0,7037$
2. *a)* $\frac{\binom{9}{4}}{\binom{14}{4}} \approx 0,1259$

   b) $\frac{\binom{9}{2}\binom{5}{2}}{\binom{14}{4}} \approx 0,3596$
3. *a)*$1/6\cdot 1/2 + 1/4\cdot 1/2 = 5/24 \approx 0,2083$

   b) $2/5 = 0,4$
4. *a)* $\{\omega_{II}\}$, egyelemű *b)* $1/4 = 0,25$

1. Egy oktató minden diákot 3/5 valószínűséggel enged át a vizsgán, ha jókedvű, és minden diákot 1/2 valószínűséggel enged át a vizsgán, ha rosszkedvű. Egy adott napon egyforma valószínűséggel jó– és rosszkedvű. Mennyi a valószínűsége, hogy ezen a napon egy adott diák megfelel a vizsgán? (8 pont)

   Legyen A az az esemény, hogy az oktató a diákot átengedi, B az az esemény, hogy az oktató jókedvű. B és $\overline{B}$ teljes eseményrendszer, hiszen uniójuk a teljes eseménytér, metszetük üres (vagyis mindig vagy jó–, vagy rosszkedvű). Mivel egyforma eséllyel történik B és $\overline{B}$, mindkét esemény valószínűsége 1/2, ami pozitív. Így használhatjuk a teljes valószínűség tételét az A eseménnyel. Tudjuk, hogy $P(A|B) = 3/5$, míg $P\left(A|\overline{B}\right) = 1/2$. Ezek alapján

   $$P(A) = P(A|B)\,P(B) + P\left(A|\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{20} \approx 0,55.$$

2. Egy fiókban nyolc fekete és hat barna zokni van. Kihúzunk közülük visszatevés nélkül négyet. Minden lehetséges húzás egyformán valószínű.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy húzunk fekete zoknit? (6 pont)
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy ugyanannyi fekete és barna zoknit húzunk? (8 pont)

   a) A visszatevéses mintavételre vonatkozó összefüggést használhatjuk. 14 zokni közül húzunk négyet, így $\binom{14}{4}$ egyformán valószínű elemi esemény (húzás) van. Amikor nem húzunk fekete zoknit, 6 barna közül kell négy különbözőt kiválasztani, ez $\binom{6}{4}$ elemi esemény. Vagyis mivel az elemi események egyformán valószínűek, annak valószínűsége, hogy húzunk fekete zoknit:

   $$1 - \frac{\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}} \approx 0,895.$$

   b) A visszatevéses mintavételre vonatkozó összefüggés továbbra is használható. Az összes elemi esemény száma $\binom{14}{4}$. Két fekete és két barna zoknit kiválasztani $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}$-féleképpen lehet (a húzás sorrendjét nem vettük figyelembe itt sem). Vagyis annak valószínűsége, hogy két fekete és két barna zoknit húzunk:

   $$\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{14}{4}} \approx 0,985.$$

3. Szabályos pénzérmével négyszer dobunk egymás után. Tekintsük a következő eseményeket. A : pontosan kétszer dobunk írást; B : dobunk fejet és írást is; C: dobunk legalább egy írást.
   a) Határozzuk meg A valószínűségét. (6 pont)
   b) Határozzuk meg $A \cup B \cup C$ valószínűségét. (10 pont)

   a) $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$ lehetséges dobássorozat van, mivel az érme szabályos, ezek egyformán valószínűek. A két írás dobás helyét $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen választhatjuk ki, 4 dobásból kell két különbözőt kijelölni. Tehát mivel az elemi események egyformán valószínűek: $P(A) = 6/16 = 3/8 = 0,325$.

   b) Könnyen látható, hogy C csak akkor nem teljesül, amikor csupa fejet dobunk. Ekkor viszont A és B sem teljesül. Tehát $A \cup B \cup C$ a FFFF kivételével minden dobássorozatot tartalmaz. Továbbra is 16 egyformán valószínű dobássorozat van, így ennek valószínűsége $15/16 = 0,9375$.

4. Egy szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után. Mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a két dobás összege nyolc, arra az eseményre nézve, hogy a két dobás összege páros? (12 pont)

$6 \cdot 6 = 36$ egyformán valószínű dobás van, hiszen mindkét dobás hatféle lehet, és a kocka szabályos. Ezek közül a dobások felében lesz a két szám összege páros, hiszen ha az első dobás adott, háromféle lehet a második, ez $6 \cdot 3 = 18$ lehetőség. Tehát annak valószínűsége, hogy a két dobás összege páros, $1/2$.

Öt olyan dobás van, amikor a két dobás összege 8: 26, 35, 44, 53, 62. Vagyis ennek valószínűsége $5/36$. Ilyenkor a két dobás összege páros is.

Tehát ha A az az esemény, hogy a két dobás összege 8, és B az, hogy a két dobás összege páros, a definíció alapján számolva kapjuk a kérdéses valószínűséget:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/36}{1/2} = \frac{5}{18} \approx 0,2778.$$

A másik feladatsor megoldásai hasonlók, az eredmények:

1. *a)* $3/8 = 0,375$ *b)* $15/16 = 0,9375$
2. $5/18 \approx 0,2778$
3. *a)* $1 - \frac{\binom{7}{4}}{\binom{17}{4}} \approx 0,9853$ *b)* $\frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{17}{4}} \approx 0,3971$
4. $4/5 \cdot 1/2 + 2/3 \cdot 1/2 = 11/15 \approx 0,7333$