Valószínűségszámítás **2. zárthelyi dolgozat** 2010. december 8.

1. Legyen X $N(0, 4)$ eloszlású valószínűségi változó. Mennyi $P(-3 \le Y < 3)$? (10 pont)

2. Egy pénzérmével 2/5 a fej, 3/5 az írás dobásának valószínűsége.
   a) Húszszor dobunk a pénzérmével. Jelölje X, hogy hányszor dobtunk fejet. Számítsuk ki X várható értékét és szórását. (8 pont)
   b) Addig dobunk az érmével, míg írást nem kapunk. Jelölje Y, hogy hányadik dobásnál kapjuk az első írást. Számítsuk ki $2Y$ és $Y + 2$ kovarianciáját. (12 pont)

3. Egy szabályos dobókocka két oldalára 1-es, négy oldalára 5-ös van írva. Kétszer dobunk a kockával.
   a) Határozzuk meg a két dobás összegének várható értékét. (4 pont)
   b) Határozzuk meg a két dobás összegének szórását. (6 pont)

4. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek paramétere 0,05.
   a) Mennyi X várható értéke? (4 pont)
   b) Mennyi $P(X \ge 1)$? (6 pont)

A dolgozaton 50 pontot lehet szerezni, az egyes feladatok pontszámai a szövegük mellett láthatók. A megoldásokat indokolni kell, teljes pontszám jó végeredményért és helyes indoklásért jár. Előadáson vagy gyakorlaton elhangzott állításokat nem kell bizonyítani.

Az elégséges határa 24 pont. Aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a következő időpontokban írhat pót-zárthelyidolgozatot:
december 17., péntek, 8-9, É -1.62. (alagsor)
december 20., hétfő, 3-4, É 0.87.
december 22., szerda, 9-10, É 0.79.

Javító dolgozatot írni ugyanezekben az időpontokban lehet.

Aki pót- vagy javító zárthelyit szeretne írni, legkésőbb a dolgozat előtti napon jelezze, hogy melyik témakörből, mikor jön.

Az eredmények az ETR infosheet rovatában, a feladatok megoldásai itt lesznek elérhetők:
`http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak`

Jegybeírás az utolsó gyakorlatok és a pót zh-k előtt és után, további időpontok a kurzusfórumon.

Bármilyen kérdés esetén e-mail ide: `agnes@cs.elte.hu`

1. Egy piros-kék koronggal 2/3 valószínűséggel kéket, 1/3 valószínűséggel pirosat dobunk.
   a) Százszor dobunk a koronggal. Jelölje X, hogy hányszor dobtunk kéket. Számítsuk ki X várható értékét és szórását. (8 pont)
   b) Addig dobunk a koronggal, míg pirosat nem kapunk. Jelölje Y, hogy hányadik dobásnál kapjuk az első pirosat. Számítsuk ki $3Y$ és $Y+3$ kovarianciáját. (12 pont)

2. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek paramétere 0,02.
   a) Mennyi X szórása? (4 pont)
   b) Mennyi $P(X \geq 1)$? (6 pont)

3. Egy szabályos dobókocka négy oldalára 1, két oldalára 3 van írva. Kétszer dobunk a kockával.
   a) Határozzuk meg a két dobás összegének várható értékét. (4 pont)
   b) Határozzuk meg a két dobás összegének szórását. (6 pont)

4. Legyen X $N(0,9)$ eloszlású valószínűségi változó. Mennyi $P(-3 \leq Y < 3)$? (10 pont)

A dolgozaton 50 pontot lehet szerezni, az egyes feladatok pontszámai a szövegük mellett láthatók. A megoldásokat indokolni kell, teljes pontszám jó végeredményért és helyes indoklásért jár. Előadáson vagy gyakorlaton elhangzott állításokat nem kell bizonyítani.

Az elégséges határa 24 pont. Aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a következő időpontokban írhat pót-zárthelyidolgozatot:
december 17., péntek, 8-9, É -1.62. (alagsor)
december 20., hétfő, 3-4, É 0.87.
december 22., szerda, 9-10, É 0.79.

Javító dolgozatot írni ugyanezekben az időpontokban lehet.

Aki pót- vagy javító zárthelyit szeretne írni, legkésőbb a dolgozat előtti napon jelezze, hogy melyik témakörből, mikor jön.

Az eredmények az ETR infosheet rovatában, a feladatok megoldásai itt lesznek elérhetők:
`http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak`

Jegybeírás az utolsó gyakorlatok és a pót zh-k előtt és után, további időpontok a kurzusfórumon.

Bármilyen kérdés esetén e-mail ide: `agnes@cs.elte.hu`

Valószínűségszámítás **2. zárthelyi dolgozat** 2010. december 8.

1. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek paramétere 0,05.
   a) Mennyi X szórása? (4 pont)
   b) Mennyi $P(X \geq 2)$? (6 pont)
2. Egy szabályos dobókocka két oldalára 1, négy oldalára 3 van írva.
   a) Harmincszor dobunk a kockával. Jelölje X, hogy hányszor dobtunk egyest. Számítsuk ki X várható értékét és szórását. (8 pont)
   b) Addig dobunk a kockával, míg hármast nem kapunk. Jelölje Y, hogy hányadik dobásnál kapjuk az első hármast. Számítsuk ki $4Y$ és $Y + 4$ kovarianciáját. (12 pont)
3. Legyen X $N(0, 4)$ eloszlású valószínűségi változó. Mennyi $P(-2 \leq Y < 2)$? (10 pont)
4. Egy korong két oldalára 2 és 4 van írva. Dobáskor a kettes valószínűsége 2/5, a négyes dobásé 3/5. Kétszer dobunk.
   a) Határozzuk meg a két dobás összegének várható értékét. (4 pont)
   b) Határozzuk meg a két dobás összegének szórását. (6 pont)

A dolgozaton 50 pontot lehet szerezni, az egyes feladatok pontszámai a szövegük mellett láthatók. A megoldásokat indokolni kell, teljes pontszám jó végeredményért és helyes indoklásért jár. Előadáson vagy gyakorlaton elhangzott állításokat nem kell bizonyítani.

Az elégséges határa 24 pont. Aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a következő időpontokban írhat pót-zárthelyidolgozatot:
december 17., péntek, 8-9, É -1.62. (alagsor)
december 20., hétfő, 3-4, É 0.87.
december 22., szerda, 9-10, É 0.79.

Javító dolgozatot írni ugyanezekben az időpontokban lehet.

Aki pót- vagy javító zárthelyit szeretne írni, legkésőbb a dolgozat előtti napon jelezze, hogy melyik témakörből, mikor jön.

Az eredmények az ETR infosheet rovatában, a feladatok megoldásai itt lesznek elérhetők:
`http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak`

Jegybeírás az utolsó gyakorlatok és a pót zh-k előtt és után, további időpontok a kurzusfórumon.

Bármilyen kérdés esetén e-mail ide: `agnes@cs.elte.hu`

1. Egy szabályos dobókocka két oldalára 2, négy oldalára 4 van írva.
   a) Harmincszor dobunk a kockával. Jelölje X, hogy hányszor dobtunk négyest. Számítsuk ki X várható értékét és szórását. (8 pont)
   b) Addig dobunk a kockával, míg négyest nem kapunk. Jelölje Y, hogy hányadik dobásnál kapjuk az első négyest. Számítsuk ki $5Y$ és $Y+5$ kovarianciáját. (12 pont)

2. Legyen X $N(0,9)$ eloszlású valószínűségi változó. Mennyi $P(-2 \leq Y < 2)$? (10 pont)

3. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek paramétere 0,01.
   a) Mennyi X várható értéke? (4 pont)
   b) Mennyi $P(X \geq 1)$? (6 pont)

4. Egy korong két oldalára 3 és 5 van írva. Dobáskor a hármas valószínűsége 1/5, az ötös dobásé 4/5. Kétszer dobunk.
   a) Határozzuk meg a két dobás összegének várható értékét. (4 pont)
   b) Határozzuk meg a két dobás összegének szórását. (6 pont)

A dolgozaton 50 pontot lehet szerezni, az egyes feladatok pontszámai a szövegük mellett láthatók. A megoldásokat indokolni kell, teljes pontszám jó végeredményért és helyes indoklásért jár. Előadáson vagy gyakorlaton elhangzott állításokat nem kell bizonyítani.

Az elégséges határa 24 pont. Aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a következő időpontokban írhat pót-zárthelyidolgozatot:
december 17., péntek, 8-9, É -1.62. (alagsor)
december 20., hétfő, 3-4, É 0.87.
december 22., szerda, 9-10, É 0.79.

Javító dolgozatot írni ugyanezekben az időpontokban lehet.

Aki pót- vagy javító zárthelyit szeretne írni, legkésőbb a dolgozat előtti napon jelezze, hogy melyik témakörből, mikor jön.

Az eredmények az ETR infosheet rovatában, a feladatok megoldásai itt lesznek elérhetők:
`http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak`

Jegybeírás az utolsó gyakorlatok és a pót zh-k előtt és után, további időpontok a kurzusfórumon.

Bármilyen kérdés esetén e-mail ide: `agnes@cs.elte.hu`

1. Az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon. Várható értéke 0, szórásnégyzete 12. Mennyi annak valószínűsége, hogy -1 és 2 közé esik? (8 pont) Mennyi X eloszlásfüggvényének értéke -1-ben? (2 pont)

2. Az X valószínűségi változó $N(2, 1)$ eloszlású. Milyen a számra lesz igaz, hogy $P(X < a) = 0,975$? (8 pont)

3. Egy dobókocka két oldalára 1, két oldalára 3, két oldalára 5 van írva. Kétszer dobunk a kockával, az elsőként dobott számot jelölje X, a másodikként dobott számot Y.
   a) Számítsuk ki X várható értékét és szórását. (10 pont)
   b) Számítsuk ki $X + 2Y$ és $X - Y$ korrelációs együtthatóját. (12 pont)

4. Egy dobozban 10 piros és k kék golyó van ($k \leq 1$ egész szám). 25-ször húzunk úgy, hogy a húzott golyót minden alkalommal visszatesszük, és minden golyót egyenlő valószínűséggel választunk. A húzott piros golyók számát jelölje X. Ennek várható értéke 5. Mennyi X szórása? (10 pont)

A dolgozaton 50 pontot lehet szerezni, az egyes feladatok pontszámai a szövegük mellett láthatók. A megoldásokat indokolni kell, teljes pontszám jó végeredményért és helyes indoklásért jár. Előadáson vagy gyakorlaton elhangzott állításokat nem kell bizonyítani.

Az elégséges határa 24 pont. Aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a következő időpontokban írhat pót-zárthelyidolgozatot:
december 17., péntek, 8-9, É -1.62. (alagsor)
december 20., hétfő, 3-4, É 0.87.
december 22., szerda, 9-10, É 0.79.

Javító dolgozatot írni ugyanezekben az időpontokban lehet.

Aki pót- vagy javító zárthelyit szeretne írni, legkésőbb a dolgozat előtti napon jelezze, hogy melyik témakörből, mikor jön.

Az eredmények az ETR infosheet rovatában, a feladatok megoldásai itt lesznek elérhetők:
`http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak`

Jegybeírás az utolsó gyakorlatok és a pót zh-k előtt és után, további időpontok a kurzusfórumon.

Bármilyen kérdés esetén e-mail ide: `agnes@cs.elte.hu`

1. Az X valószínűségi változó $N(3,1)$ eloszlású. Milyen a számra lesz igaz, hogy $P(X < a) = 0,975$? (8 pont)

2. Az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az (a,b) intervallumon. Várható értéke 0, szórásnégyzete 12. Mennyi annak valószínűsége, hogy -2 és 1 közé esik? (8 pont) Mennyi X eloszlásfüggvényének értéke 0-ban? (2 pont)

3. Egy dobozban 10 piros és k kék golyó van ($k \leq 1$ egész szám). 30-szor húzunk úgy, hogy a húzott golyót minden alkalommal visszatesszük, és minden golyót egyenlő valószínűséggel választunk. A húzott piros golyók számát jelölje X. Ennek várható értéke 5. Mennyi X szórása? (10 pont)

4. Egy dobókocka két oldalára 2, két oldalára 4, két oldalára 6 van írva. Kétszer dobunk a kockával, az elsőként dobott számot jelölje X, a másodikként dobott számot Y.
   a) Számítsuk ki X várható értékét és szórását. (10 pont)
   b) Számítsuk ki $X + 3Y$ és $X - Y$ korrelációs együtthatóját. (12 pont)

A dolgozaton 50 pontot lehet szerezni, az egyes feladatok pontszámai a szövegük mellett láthatók. A megoldásokat indokolni kell, teljes pontszám jó végeredményért és helyes indoklásért jár. Előadáson vagy gyakorlaton elhangzott állításokat nem kell bizonyítani.

Az elégséges határa 24 pont. Aki ezt nem éri el vagy a dolgozatot nem írja meg, a következő időpontokban írhat pót-zárthelyidolgozatot:
december 17., péntek, 8-9, É -1.62. (alagsor)
december 20., hétfő, 3-4, É 0.87.
december 22., szerda, 9-10, É 0.79.

Javító dolgozatot írni ugyanezekben az időpontokban lehet.

Aki pót- vagy javító zárthelyit szeretne írni, legkésőbb a dolgozat előtti napon jelezze, hogy melyik témakörből, mikor jön.

Az eredmények az ETR infosheet rovatában, a feladatok megoldásai itt lesznek elérhetők:
`http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak`

Jegybeírás az utolsó gyakorlatok és a pót zh-k előtt és után, további időpontok a kurzusfórumon.

Bármilyen kérdés esetén e-mail ide: `agnes@cs.elte.hu`

2. zárthelyi dolgozat, 2010. december 8., megoldásvázlatok

1. X eloszlása $N(0,4)$, a paraméterek: $m = 0$ és $\sigma = 2$. Így az előadáson tanultak szerint $P(X < t) = \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$ minden t valós számra. Ezzel, felhasználva a $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$ azonosságot is:

$$P(-3 \leq X < 3) = P(X < 3) - P(X < -3) = \Phi(3/2) - \Phi(-3/2) = 2\Phi(3/2) - 1 \approx 0,8664.$$

2. a) Minden dobás egymástól függetlenül 2/5 valószínűséggel lesz fej, így 20 dobásból a kapott fejek száma binomiális eloszlású $n = 20$ renddel és $p = 2/5$ paraméterrel. Ezek alapján:

$$E(X) = np = 8, \qquad D(X) = \sqrt{np(1-p)} \approx 2,1909.$$

b) Minden dobás egymástól függetlenül 3/5 valószínűséggel lesz írás, így Y geometriai eloszlású $p = 3/5$ paraméterrel. Ezt és a kovariancia ismert tulajdonságait felhasználva:

$$\operatorname{cov}(2Y, Y+2) = \operatorname{cov}(2Y,Y) + \operatorname{cov}(2Y,2) = 2\operatorname{cov}(Y,Y) + 0 = 2D^2(Y) = 2 \cdot \frac{1-p}{p^2} = \frac{20}{9} \approx 2,222.$$

3. Legyen az első dobás X, a második dobás Y. Ezek eloszlása, így várható értéke és szórása is megegyezik.

a) A várható érték tulajdonságai és definíciója alapján

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2E(X) = 2\left[1 \cdot P(X=1) + 5 \cdot P(X=5)\right] =$$
$$= 2\left(1 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{22}{3} \approx 7,333.$$

b) A szórásnégyzet tulajdonságai és definíciója alapján

$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) = 2D^2(X) = 2\left[E\left(X^2\right) - E(X)^2\right] =$$
$$= 2\left[1^2 \cdot P(X=1) + 5^2 \cdot P(X=5) - \left(\frac{22}{3}\right)^2\right] =$$
$$= 2\left(1 \cdot \frac{1}{3} + 25 \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{22}{3}\right)^2\right) = \frac{64}{9} \Rightarrow D(X+Y) = \frac{8}{3} \approx 6,667.$$

4. $X \sim \exp(\lambda)$, ahol most $\lambda = 0,05$. Legyen F az eloszlásfüggvénye.

a) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 20.$

b) $P(X \geq 1) = 1 - F(1) = e^{-0,05 \cdot 1} \approx 0,9512.$

A többi feladatsor megoldásai hasonlók, az eredmények:

1. a) 66,67, 4,714 b) 18
2. a) 50 b) 0,9802
3. a) $10/3 \approx 3,333$ b) $4/3 \approx 1,333$
4. 0,6826

1. a) 20 b) 0,9048
2. a) 10 2,582 b) 3

3. 0,6826

4. a) 6,4 b) 1,386

1. a) 20 2,582 b) 3,75

2. 0,4908

3. a) 100 b) 0,99005

4. a) 9,2 b) 1,1314

2. zárthelyi dolgozat, 2010. december 10., megoldásvázlatok

1. A várható érték $(a+b)/2$, a szórásnégyzet $(b-a)^2/12$ egyenletes eloszlás esetén. Ezért most $a+b=0,\ b-a=12$, amiből $a=-6,\ b=6$ adódik.

   Legyen X eloszlásfüggvénye F, ezt ismerjük. Ez alapján számolunk.

$$P(-1<X<2)=F(2)-F(-1)=\frac{2-(-6)}{12}-\frac{-1-(-6)}{12}=\frac{1}{4}.$$

$$F(-1)=\frac{5}{12}\approx 0,4167.$$

2. Most az eloszlás paraméterei $m=2,\ \sigma=1$. Így az előadáson tanultak szerint $P(X<t)=\Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$ minden t valós számra. Tehát $P(X<a)=\Phi\left(\frac{a-2}{1}\right)$. A standard normális eloszlásfüggvény táblázata alapján $\Phi(1,96)\approx 0,975$. Ezért az az a, melyre $a-2=1,96$, jó lesz: $a=3,96$.

3. a) Definíció alapján számolunk.

$$E(X)=1\cdot P(X=1)+3\cdot P(X=3)+5\cdot P(X=5)=(1+3+5)\cdot\frac{1}{3}=3.$$

$$D^2(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=\left[1^2\cdot P(X=1)+3^2\cdot P(X=3)+5^2\cdot P(X=5)\right]-3^2=\frac{8}{3}\Rightarrow$$
$$D(X)\approx 1,633.$$

   b) A kovariancia és a korrelációs együttható ismert tulajdonságait használjuk, továbbá, hogy X és Y függetlenek, és mivel eloszlásuk megegyezik, szórásnégyzetük is.

$$R(X+2Y,X-Y)=\frac{\operatorname{cov}(X+2Y,X-Y)}{D(X+2Y)\,D(X-Y)}=\frac{\operatorname{cov}(X,X)+0+0+\operatorname{cov}(2Y,-Y)}{\sqrt{D^2(X)+D^2(2Y)}\sqrt{D^2(X)+D^2(-Y)}}=$$
$$=\frac{D^2(X)-2D^2(Y)}{\sqrt{D^2(X)+4D^2(Y)}\sqrt{D^2(X)+D^2(Y)}}=$$
$$=\frac{-D^2(X)}{\sqrt{5D^2(X)}\sqrt{2D^2(X)}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}\approx -0,3162.$$

4. Minden alkalommal egymástól függetlenül $\frac{10}{10+k}$ valószínűséggel húzunk piros golyót, ezért 25 húzásból a kihúzott piros golyók számának, X-nek az eloszlása binomiális $n=25$ renddel és $p=\frac{10}{10+k}$ paraméterrel. X várható értéke np, ebből $p=1/5$ és $D(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{25\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}=2$ adódik.

A másik feladatsor megoldásai hasonlók, az eredmények: 1. 4,96 2. 1/4, 1/2 3. 2,041 4. a) 4, 1,6333 b) -0,4472.