Valószínűségszámítás **9. feladatsor** 2012. november 29.

1. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?

2. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?

3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?

4. (beadható december 6-ig) Egy mérést sokszor ismételhetünk. A mérés hibája minden alkalommal a többitől függetlenül normális eloszlású $0,1$ várható értékkel és $0,2$ szórással. Hány mérést végezzünk ahhoz, hogy átlag hibájának abszolút értéke legfeljebb $0,1$ valószínűséggel legyen $0,12$-nél nagyobb?

Valószínűségszámítás **9. feladatsor** 2012. november 29.

1. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?

2. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?

3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?

4. (beadható december 6-ig) Egy mérést sokszor ismételhetünk. A mérés hibája minden alkalommal a többitől függetlenül normális eloszlású $0,1$ várható értékkel és $0,2$ szórással. Hány mérést végezzünk ahhoz, hogy átlag hibájának abszolút értéke legfeljebb $0,1$ valószínűséggel legyen $0,12$-nél nagyobb?

Valószínűségszámítás **8. feladatsor** 2012. november 15.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha F eloszlásfüggvény és $a > 0$, akkor $[F(x)]^a$ is eloszlásfüggvény.
2. Legyen F folytonos eloszlásfüggvény és $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy $G(x) = F(x) - F(1/x)$ $(x \geq 1)$, $G(x) = 0$ $(x < 1)$ is eloszlásfüggvény!
3. X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F, a, b valós számok. Határozzuk meg $aX + b$ eloszlásfüggvényét.
4. Az X valószínűségi változó F eloszlásfüggvénye folytonos és szigorúan monoton. Mi lesz $F(X)$ eloszlása?
5. A lovaskocsik felelősségbiztosításának kárainál dologi és személyi kártérítést nyújt a biztosító. A dologi kifizetések $G(a, 1)$ eloszlásúak, a személyiek pedig $G(b, 1)$ eloszlásúak. Feltételezzük, hogy a két kifizetés független egymástól. Milyen eloszlású egy kár összkifizetése?
6. Egy tőzsdén q-féle részvény van. Ezek árfolyamai függetlenek egymástól. Egy év múlva az i. részvény eredeti árának X_i^2-szeresét éri, ahol X_i $N(0, 1)$. Milyen eloszlású egy befektető portfoliójának értéke egy év múlva, ha most mindegyik részvénybe 1 petákot fektetett?
7. Számítsuk ki a gamma–, Pareto– és lognormális eloszlású valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét.
8. (beadható november 22-ig) Mutassuk meg, hogy az X valószínűségi változó várható értéke pontosan akkor létezik, amikor $[X]$-é, továbbá $E(X) = E[X]$ pontosan akkor, amikor X egész értékű. ([] az egészrészt jelöli.)
9. (beadható november 29-ig) X_1 és X_2 független, a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. $Y_1 = \min(X_1, X_2)$ és $Y_2 = \max(X_1, X_2)$. Mennyi az $R(Y_1, Y_2)$ korrelációs együttható?
10. (beadható december 6-ig) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók, $R(X_i, X_j) = r$, ha $i \neq j$. Mutassuk meg, hogy $r \geq -\frac{1}{n-1}$.
11. Egy síküveggyár 100×200 centiméteres üvegtáblákat gyárt. A gyártott táblák rövidebb oldalainak hossza $N(100, 1)$ eloszlású, a hosszabbaké $N(200, 22)$. Mennyi a valószínűsége, hogy egy legyártott tábla kerülete kisebb 595 cm-nél?
12. A Morzsa pékség kilós kenyereinek tömege grammban $N(1000, 102)$ eloszlású helyes beállításnál, helytelennél $N(970, 1002)$ eloszlású. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 100 kenyér tömegének átlaga kisebb 990 grammnál.
13. Legyenek X_i-k független p-indikátorok. Mihez konvergál $(X_1^5 + ... + X_n^5)/n$?
14. Jelölje X_i az i. kockadobás eredményét szabályos dobókockával. Mihez konvergál $(X_1^2 + ... + X_n^2)/n$?
15. Mutassuk meg, hogy a konstanshoz való gyenge konvergenciából következik a sztochasztikus.
16. (beadható december 6-ig) Mi n szabályos kockadobás mértani közepének 1 valószínűségű limesze, ha $n \to \infty$?

Valószínűségszámítás **7. feladatsor** 2012. november 8.

1. Legyen X standard normális eloszlású. Mennyi $P(X^2 < 1)$ és $E(X^2)$?
2. Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel. Mi $1 - e^{-X}$ sűrűségfüggvénye?
3. Legyen F szigorúan monoton eloszlásfüggvény. Mutassuk meg, hogy ha X egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon, akkor az $F^{-1}(X)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye éppen F.
4. Ha a diplomások fizetésének eloszlása (ezer Ft-ban) Z+100, ahol Z exponenciális eloszlású (1/100 paraméterrel), a többi dolgozóé pedig Y+50, ahol Y exponenciális eloszlású (1/50 paraméterrel) és a cégnél a dolgozók 60%-a diplomás, akkor milyen eloszlású egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozó fizetése?
5. Egy egyszerű csapadék-modell lehet a következő: annak az esélye, hogy egy adott napon nem lesz csapadék, $0,6$. Ha van csapadék, akkor a mennyisége exponenciális eloszlású, $\lambda = 2$ paraméterrel. Adjuk meg a csapadékmennyiség eloszlásfüggvényét. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 1 mm csapadék lesz? Abszolút folytonos-e az eloszlás?
6. Legyen X, Y független exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Adjuk meg a $\min(X, Y)$ valószínűségi változó eloszlását. Általánosítsuk a feladatot n változó esetére.
7. (beadható november 15-ig) Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint a) az egységnégyzeten; b) a $\{(x, y) \in [0,1]^2 : x \leq y\}$ háromszögben. Jelölje X a kiválasztott pont első koordinátáját. Adjuk meg X sűrűségfüggvényét.

Valószínűségszámítás **7. feladatsor** 2012. november 8.

1. Legyen X standard normális eloszlású. Mennyi $P(X^2 < 1)$ és $E(X^2)$?
2. Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel. Mi $1 - e^{-X}$ sűrűségfüggvénye?
3. Legyen F szigorúan monoton eloszlásfüggvény. Mutassuk meg, hogy ha X egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon, akkor az $F^{-1}(X)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye éppen F.
4. Ha a diplomások fizetésének eloszlása (ezer Ft-ban) Z+100, ahol Z exponenciális eloszlású (1/100 paraméterrel), a többi dolgozóé pedig Y+50, ahol Y exponenciális eloszlású (1/50 paraméterrel) és a cégnél a dolgozók 60%-a diplomás, akkor milyen eloszlású egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozó fizetése?
5. Egy egyszerű csapadék-modell lehet a következő: annak az esélye, hogy egy adott napon nem lesz csapadék, $0,6$. Ha van csapadék, akkor a mennyisége exponenciális eloszlású, $\lambda = 2$ paraméterrel. Adjuk meg a csapadékmennyiség eloszlásfüggvényét. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 1 mm csapadék lesz? Abszolút folytonos-e az eloszlás?
6. Legyen X, Y független exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Adjuk meg a $\min(X, Y)$ valószínűségi változó eloszlását. Általánosítsuk a feladatot n változó esetére.
7. (beadható november 15-ig) Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint a) az egységnégyzeten; b) a $\{(x, y) \in [0,1]^2 : x \leq y\}$ háromszögben. Jelölje X a kiválasztott pont első koordinátáját. Adjuk meg X sűrűségfüggvényét.

Valószínűségszámítás **6. feladatsor** 2012. október 18.

1. Milyen a és b értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény: $F(x) = e^{-be^{-ax}}$.
2. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, 1)$ intervallumon. Az intervallumot X két részre osztja. Jelöljük a hosszabb hosszát $Y(1)$-gyel, a rövidebbét $Y(2)$-vel. Határozzuk meg eloszlásfüggvényeiket!
3. Egy szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után. Számítsuk ki és ábrázoljuk a dobott számok összegének eloszlását.
4. Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, Y a különbségük. Számítsuk ki $\mathrm{cov}(X, Y)$-t! Független-e X és Y?
5. Véletlenszerűen választunk egy pontot az $\{x^2 + y^2 < 1\}$ nyílt körlemezben. Jelölje Z a kiválasztott pont origótól mért távolságát. Adjuk meg Z eloszlás– és sűrűségfüggvényét!
6. Legyen X sűrűségfüggvénye c/x^4, ha $1 < x$, és 0 különben. Mennyi c?

Valószínűségszámítás **6. feladatsor** 2012. október 18.

1. Milyen a és b értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény: $F(x) = e^{-be^{-ax}}$.
2. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, 1)$ intervallumon. Az intervallumot X két részre osztja. Jelöljük a hosszabb hosszát $Y(1)$-gyel, a rövidebbét $Y(2)$-vel. Határozzuk meg eloszlásfüggvényeiket!
3. Egy szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után. Számítsuk ki és ábrázoljuk a dobott számok összegének eloszlását.
4. Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, Y a különbségük. Számítsuk ki $\mathrm{cov}(X, Y)$-t! Független-e X és Y?
5. Véletlenszerűen választunk egy pontot az $\{x^2 + y^2 < 1\}$ nyílt körlemezben. Jelölje Z a kiválasztott pont origótól mért távolságát. Adjuk meg Z eloszlás– és sűrűségfüggvényét!
6. Legyen X sűrűségfüggvénye c/x^4, ha $1 < x$, és 0 különben. Mennyi c?

Valószínűségszámítás **5. feladatsor** 2012. október 11.

1. Határozzuk meg egy szabályos kockadobás szórásnégyzetét!
2. Határozzuk meg egy negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzetét!
3. Becsüljük meg annak valószínűségét Markov– és Csebisev-egyenlőtlenséggel, hogy 1000 érmedobásból több, mint 600 fej jön ki! Oldjuk meg ennek felhasználásával is: $P(X > 600) = P\left((3/2)^X > (3/2)^{600}\right)$.
4. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású véges szórású valószínűségi változók. Mennyi $R(X, X+Y)$?
5. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

Y/X	0	1	2
1	3/27	3/27	4/27
2	1/27	1/27	7/27
3	2/27	2/27	4/27

   Határozzuk meg X és Y eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét és a korrelációjukat!
6. Egy 52 lapos franciakártya-csomagból húzunk két lapot visszatevés nélkül. Legyen X a kőrök, Y az ászok száma. Adjuk meg X és Y korrelációs együtthatóját. Függetlenek-e ezek a valószínűségi változók?
7. Egy játékteremben először a rulettkereket kell megforgatnunk. Ezután a kijött számot mondjuk be a játékautomatába, mely a számnak megfelelő paraméterű Poisson-eloszlású forintot ad. Mennyi a nyereményünk várható értéke?

Valószínűségszámítás

4. feladatsor 2012. október 2–4.

1. Tegyük fel, hogy egy 50 éves férfi 1%-os valószínűséggel hal meg egy éven belül, egy 51 éves $1,1\%$-os valószínűséggel. Egy most 50 éves férfi 2 évre szóló életbiztosítást köt. Ha az első évben hal meg, akkor 2 millió forintot fizet a biztosító, ha a másodikban, akkor 1 milliót. Várhatóan mennyit fog fizetni a biztosító?

2. Határozzuk meg független, azonos paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók összegének eloszlását!

3. Határozzuk meg független p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók összegének eloszlását!

4. Rozi elrejt egy pénzérmét. El kell találnunk, hogy írás vagy fej van felül. Az írás eltalálásánál 3 M Ft-ot kapunk, a fej eltalálásánál 1 M Ft-ot. Hibánál mi fizetünk 2 M Ft-ot. Igazságos-e ez a játék?

5. Egy készülékben 7 biztosíték van. Időnként az egyik elromlik – mindig mindegyik 1/7 valószínűséggel–, és ki kell cserélni. Várhatóan hányadik csere alkalmával cseréljük az utolsó eredeti biztosítékot?

6. Várhatóan hány különböző születésnapja van 100 véletlenszerűen választott embernek?

7. Egy populáció egyedszáma egy nap alatt 1/6 valószínűséggel nem változik, 1/3 valószínűséggel kettővel nő, 1/2 valószínűséggel csökken eggyel. Igaz-e, hogy $0,4$-nél nagyobb a valószínűsége annak, hogy 24 nap alatt az egyedszám 10-nél kevesebbel változik?

8. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos negatív binomiális eloszlású változók. Határozzuk meg $\frac{X_1+X_1+\ldots+X_k}{X_1+X_2+\ldots+X_n}$ várható értékét.

9. Mennyi a lottón kihúzott számok összegének várható értéke?

10. Két ládában vannak almáink. Az elsőben 15 rohadt és 27 jó, a másodikban 5 rohadt és 52 jó. Az elsőből átteszünk a másodikba 17 almát. Mennyi a valószínűsége, hogy ezután jó almát választunk a második dobozból?

11. (beadható október 18-ig) 10 házaspár tagjai, köztük Sári és Ádám leülnek egy hosszú asztal mellé, melynek mindkét oldalán 10-10 ember fér el. A 20 ember összes különböző elhelyezkedése egyformán valószínű.

    a) Mennyi a valószínűsége, hogy Sári és Ádám egymás mellé ülnek?

    b) Mennyi az egymás mellé kerülő házaspárok számának várható értéke?

1. Mi n kockadobás maximumának eloszlása, ha szabályos kockával dobunk?

2. Egy sportlövő 1/7 valószínűséggel talál el egy léggömböt minden egyes lövésnél a többitől függetlenül. Az a) első b) ötödik találatig lő. Mi a lövései számának eloszlása?

3. Az egyik tóban 100 ponty van, összesen pedig 1500 hal.

   a) Egy horgász 12 halat fog, a kifogottakat nem engedi vissza. Mi a kifogott pontyok számának eloszlása?

   b) Mi a válasz, ha visszaengedi a kifogott halakat?

   c) Egy horgász addig horgászik, amíg pontyot nem fog. Mi a kifogott halak számának eloszlása, ha nem engedi vissza a kifogott halakat?

   d) Mi a válasz, ha visszaengedi a kifogott halakat?

4. Két érmével dobunk, majd még annyi érmével, ahány fejet az első két dobásnál kaptunk. Jelölje X az összesen kapott fejek számát. Adjuk meg X eloszlását!

5. 100 érme közül az egyik hamis, ennek mindkét oldalán fej van. Egy érmét véletlenszerűen, egyenletesen kiválasztva és azzal tízszer dobva tíz fejet kaptak. Ezzel a feltétellel mennyi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtak?

6. Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (1/3 az esélye a helyes találatra). Helyesen válaszolt. Mennyi a valószínűsége, hogy tudta is a helyes választ?

7. (beadható október 18-ig) Egy osztályba 22 fiú és 17 lány jár. Minden fiúra igaz, hogy az egész tanévben a késéseinek száma Poisson-eloszlású 12 paraméterrel, minden lányé Poisson-eloszlású 5 paraméterrel. Kiválasztunk valakit az osztályból, mindenkit ugyanakkora eséllyel választva. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválaszott egyszer sem késik el a tanévben?

1. Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle figura van. Mennyi a valószínűsége, hogy a 20. tojásnál lesz meg neki mind a 10 fajta?

2. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás hatos, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás hatos?

3. Egy televíziós játékban 3 ajtó közül választhat a játékos, az egyik mögé ajándék van rejtve. A játékos választása után a műsorvezető kinyit egy másik ajtót és mutatja, hogy ott nincs ajándék. Felajánlja a játékosnak, hogy még változtathat, melyik ajtót választja. Érdemes-e változtatni? (Monty Hall)

4. Egy játékos annyiszor lőhet egy léggömbre, ahány 6-ost dobott egymás után egy dobókockával (például, ha elsőre 6-ost, másodikra 2-est dob, akkor egyszer lőhet). Mennyi a valószínűsége, hogy szétlövi a léggömböt, ha egy lövésnél 1/1000 valószínűséggel talál?

5. 41 millió lottószelvényt töltenek ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy ötös találat? Lottósorsolásnál 90 szám közül húznak ötöt visszatevés nélkül.

6. Két kockadobásból az első eredményét jelöljük X-szel, a másodikét Y-nal. A következő eseményeket vizsgáljuk:
   A1: 2 osztója X-nek, 3 Y-nak. A2: 2 osztója Y-nak, 3 X-nek. A3: Y osztója X-nek.
   A4: X osztója Y-nak. A5: 2 osztója $X + Y$-nak. A6: 3 osztója $X + Y$-nak.
   Melyek lesznek közülük függetlenek?

7. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Mindenki a többiektől függetlenül 1/10 eséllyel száll ki az egyes emeleteken. Mennyi a valószínűsége, hogy minden emeleten megáll a lift?

8. (beadható október 4-ig) 42 szabályos dobókockával dobunk. Mennyi annak valószínűsége, hogy a kapott számok összege osztható hattal? Mennyi annak valószínűsége, hogy több páros számot dobunk, mint páratlant?

1. Mennyi a valószínűsége, hogy egy találomra választott telefonszám utolsó 3 számjegye megegyezik? A számjegyek 0 és 9 között lehetnek, és minden számhármas egyformán valószínű.

2. Mennyi a valószínűsége, hogy a) két; b) négy; c) n kockadobás maximuma 5, azaz a legnagyobb dobott szám 5?

3. Lottósorsolásnál 1-90-ig számozott golyók közül húznak ötöt visszatevés nélkül, minden lehetőség egyformán valószínű. Mennyi annak valószínűsége, hogy a legnagyobb húzott szám éppen 42? Mennyi annak valószínűsége, hogy a k. legnagyobb kihúzott szám éppen l-lel egyenlő? ($k = 1, \ldots, 5,\ l = 1, \ldots, 90$).

4. Egy szabályos érmét dobunk fel sokszor egymás után. Nullából indulunk, fej dobásnál balra, írásnál jobbra lépünk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy $2n$. lépésben a nullában vagyunk? Mennyi annak valószínűsége, hogy a $2n$. lépésben térünk vissza először a nullába?

5. Kettétörünk egy 1 m hosszú botot. Jelölje X a nagyobb rész hosszát és Y a rövidebbét. Mennyi $P(X < x)$ és $P(Y < x)$?

6. 50 ember 500 Ft-ossal, 50 ember 1000 Ft-ossal várakozik és a jegy 500 Ft-ba kerül. Mennyi a valószínűsége, hogy a sor nem akad el, ha a pénztárban nem volt pénz? Mennyi ugyanez a valószínűség, ha n embernek van ötszázasa és m embernek ezrese?

7. Feldobunk egy szabályos pénzérmét, ha fejet kapunk, akkor még kétszer dobunk, ha pedig írást, akkor még egyszer.
   a) Mi lesz az eseménytér?
   b) Mennyi annak valószínűsége, hogy 0, 1, 2 illetve 3 fejet dobunk, ha az érme szabályos?

8. (beadható szeptember 27-ig) Egy szabályos pénzérmével hatszor dobunk egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy az alábbi két esemény közül legalább az egyik teljesül:

   a) három fejet dobunk; az utolsó dobás fej.

   b) páros sok fejet dobunk; az utolsó két dobás különböző.