Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** 2011. október 18.

1. Egy betegség kimutatására tesztet alkalmaznak. A teszt a beteg embereknél $0,95$ valószínűséggel mutatja ki a betegséget, viszont az egészséges embereknél is betegséget jelez 0,01 valószínűséggel. A betegség ritka, minden ember 0,08 valószínűséggel beteg. Feltéve, hogy valakinek az elvégzett teszt betegséget jelez, mennyi a valószínűsége, hogy valóban beteg? (8 pont)
2. Egy szabályos pénzérmével 100-szor dobunk. Legyen $A$ az az esemény, hogy a dobások között pontosan egy fej vagy pontosan egy írás van, $B$ az az esemény, hogy több írást dobunk, mint fejet. *a)* Mennyi $B$ valószínűsége? (6 pont) *b)* Független-e $A$ és $B$? (6 pont)
3. Egy tóban 100 hal van, ebből 10 ponty. Valaki addig horgászik, amíg ki nem fog egy pontyot, úgy, hogy a kifogott halat nem dobja vissza. Jelölje $X$, hogy hány halat fogott (vagyis, hogy hányadik kapásnál fogja ki az első pontyot). Minden alkalommal minden hal egyenlő valószínűséggel akad a horogra. Adjuk meg $X$ eloszlását! (10 pont)
4. Ákos és Bálint egy szabályos dobókockát dobálnak. Ha a dobás 1 vagy 2, Ákos nyer, ha 6, Bálint nyer, és a játék be is fejeződik, a maradék három dobásnál pedig folytatódik. Mennyi a valószínűsége, hogy a játék Ákos győzelmével fejeződik be? (10 pont)
5. Egy 32 lapos magyarkártya-csomagból négy lapot húzunk visszatevés nélkül. Minden húzás egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két piros és pontosan egy zöld lapot húzunk? A csomagban négy piros és négy zöld lap van. (10 pont)
6. (beadható feladat október 27-ig) Egy érmével addig dobunk, amíg a FFIF sorozat meg nem jelenik. Mennyi az ehhez szükséges dobások számának várható értéke?

Az elégséges határa: 21 pont. Várható ponthatárok: 42, 56, 70, 84.

Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** 2011. október 18.

1. Egy 52 lapos franciakártya-csomagból négy lapot húzunk visszatevés nélkül. Minden húzás egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két piros és pontosan egy treff lapot húzunk? A csomagban 13 piros és 13 treff lap van. (10 pont)
2. Egy szabályos pénzérmével 100-szor dobunk. Legyen $A$ az az esemény, hogy a dobások között pontosan egy fej vagy pontosan egy írás van, $B$ az az esemény, hogy legalább annyi írást dobunk, mint fejet. *a)* Mennyi $B$ valószínűsége? (4 pont) *b)* Független-e $A$ és $B$? (8 pont)
3. Egy tóban 1000 hal van, ebből 100 ponty. Valaki addig horgászik, amíg ki nem fog egy pontyot, úgy, hogy a kifogott halat nem dobja vissza. Jelölje $X$, hogy hány halat fogott (vagyis, hogy hányadik kapásnál fogja ki az első pontyot). Minden alkalommal minden hal egyenlő valószínűséggel akad a horogra. Adjuk meg $X$ eloszlását! (10 pont)
4. Eszter és Andi egy szabályos dobókockát dobálnak. Ha a dobás osztható hárommal, Eszter nyer, ha egy maradékot ad, Andi nyer, ilyenkor a játék véget ér, két maradékot adó dobásnál pedig folytatódik. Mennyi a valószínűsége, hogy a játék Andi győzelmével fejeződik be? (10 pont)
5. Két pénzérme van egy zsákban, melyek ránézésre megkülönböztethetetlenek. Az egyik szabályos, a másikkal azonban $1/4$ a fej és $3/4$ az írás dobásának valószínűsége. Bekötött szemmel kihúzzuk az egyik érmét, és feldobjuk egyszer. Feltéve, hogy írást dobtunk, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét húztuk? (8 pont)
6. (beadható feladat október 27-ig) Egy érmével addig dobunk, amíg a FFIF sorozat meg nem jelenik. Mennyi az ehhez szükséges dobások számának várható értéke?

Az elégséges határa: 21 pont. Várható ponthatárok: 42, 56, 70, 84.

Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** 2011. október 20.

1. Egy tízemeletes házban tíz ember száll be a liftbe a földszinten. Mindenki a többiektől függetlenül minden emeleten egyenlő valószínűséggel száll ki. Mennyi a valószínűsége, hogy minden emeleten megáll a lift? (8 pont)
2. Egy egységnyi oldalhosszúságú négyzetben választunk egy pontot véletlenszerűen, egyenletesen. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont legalább 1/4 távolságra van a négyzet minden oldalától? (8 pont)
3. Egy szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után, majd annyiszor dobunk egy érmével, amennyi a dobott számok összege. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább tíz fejet dobunk? (10 pont)
4. Dénes a hétvégi programját tervezte. Azt mondta, hogy napos idő esetén 0,9, borús idő esetén 0,7, esős idő esetén 0,2 valószínűséggel megy biciklizni. Az időjárás-előrejelzés szerint a napos idő valószínűsége 0,6, a borúsé és az esősé egyaránt 0,2. Feltéve, hogy Dénes biciklizni ment a hétvégén, mennyi a valószínűsége, hogy napos idő volt a lakóhelyén? (10 pont)
5. Egy szabályos pénzérmével ötször dobunk egymás után. Legyen $A$ az az esemény, hogy a dobások között pontosan három fej van, $B$ az az esemény, hogy több írást dobunk, mint fejet. *a)* Mennyi $B$ valószínűsége? (5 pont) *b)* Független-e $A$ és $B$? (9 pont)
6. (beadható feladat október 27-ig) Hány kockadobásnál a legnagyobb annak valószínűsége, hogy pontosan két hatost dobunk?

Az elégséges határa: 21 pont. Várható ponthatárok: 42, 56, 70, 84.


Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** 2011. október 20.

1. Egy tízemeletes házban tíz ember száll be a liftbe a földszinten. Mindenki a többiektől függetlenül minden emeleten egyenlő valószínűséggel száll ki. Mennyi a valószínűsége, hogy minden emeleten megáll a lift? (8 pont)
2. Egy egységnyi oldalhosszúságú négyzetben választunk egy pontot véletlenszerűen, egyenletesen. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont legalább 1/4 távolságra van a négyzet minden oldalától? (8 pont)
3. Egy szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után, majd annyiszor dobunk egy érmével, amennyi a dobott számok összege. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább tíz fejet dobunk? (10 pont)
4. Dénes a hétvégi programját tervezte. Azt mondta, hogy napos idő esetén 0,9, borús idő esetén 0,7, esős idő esetén 0,2 valószínűséggel megy biciklizni. Az időjárás-előrejelzés szerint a napos idő valószínűsége 0,6, a borúsé és az esősé egyaránt 0,2. Feltéve, hogy Dénes biciklizni ment a hétvégén, mennyi a valószínűsége, hogy napos idő volt a lakóhelyén? (10 pont)
5. Egy szabályos pénzérmével ötször dobunk egymás után. Legyen $A$ az az esemény, hogy a dobások között pontosan három fej van, $B$ az az esemény, hogy több írást dobunk, mint fejet. *a)* Mennyi $B$ valószínűsége? (5 pont) *b)* Független-e $A$ és $B$? (9 pont)
6. (beadható feladat október 27-ig) Hány kockadobásnál a legnagyobb annak valószínűsége, hogy pontosan két hatost dobunk?

Az elégséges határa: 21 pont. Várható ponthatárok: 42, 56, 70, 84.

Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** 2011. október 20.

1. Szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után. Teljesen független-e az alábbi három esemény: dobunk hatost, az összeg 7, dobunk egyest (6 pont). Független-e az első kettő? (6 pont)

2. Péter minden nap a többitől függetlenül 0,03 valószínűséggel késik el az iskolából. Késését azonban nem minden alkalommal jegyzik fel, mindig a többitől függetlenül 2/3 valószínűséggel írják fel. Jelölje $X$ a feljegyzett novemberi késések számát. Novemberben 21 munkanap van. Adjuk meg $X$ eloszlását és várható értékét. (10 pont)

3. Lottósorsolásnál 1-90-ig számozott golyók közül húznak visszatevés nélkül ötöt. Minden számötös egyformán valószínű. Mennyi annak valószínűsége, hogy a legnagyobb és a legkisebb kihúzott szám különbsége 15? (10 pont)

4. Dénes a hétvégi programját tervezte. Azt mondta, hogy napos idő esetén 0,9, borús idő esetén 0,7, esős idő esetén 0,2 valószínűséggel megy biciklizni. Az időjárás-előrejelzés szerint a napos idő valószínűsége 0,6, a borúsé és az esősé egyaránt 0,2. Feltéve, hogy Dénes biciklizni ment a hétvégén, mennyi a valószínűsége, hogy borús idő volt a lakóhelyén? (8 pont)

5. Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, amíg nem lesz két fej egymás után, vagy nem lesz egy fej után egy írás. Mennyi a valószínűsége, hogy az FF sorozat előbb jelenik meg, mint az FI sorozat? (10 pont)

6. (beadható feladat október 27-ig) Oldjuk meg a 2. feladatot, ha az összes késés száma 0,03 paraméterű Poisson-eloszlású.

Az elégséges határa: 21 pont. Várható ponthatárok: 42, 56, 70, 84.

Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** 2011. október 20.

1. Szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után. Teljesen független-e az alábbi három esemény: dobunk hatost, az összeg 7, dobunk egyest (6 pont). Független-e az első kettő? (6 pont)

2. Péter minden nap a többitől függetlenül 0,03 valószínűséggel késik el az iskolából. Késését azonban nem minden alkalommal jegyzik fel, mindig a többitől függetlenül 2/3 valószínűséggel írják fel. Jelölje $X$ a feljegyzett novemberi késések számát. Novemberben 21 munkanap van. Adjuk meg $X$ eloszlását és várható értékét. (10 pont)

3. Lottósorsolásnál 1-90-ig számozott golyók közül húznak visszatevés nélkül ötöt. Minden számötös egyformán valószínű. Mennyi annak valószínűsége, hogy a legnagyobb és a legkisebb kihúzott szám különbsége 15? (10 pont)

4. Dénes a hétvégi programját tervezte. Azt mondta, hogy napos idő esetén 0,9, borús idő esetén 0,7, esős idő esetén 0,2 valószínűséggel megy biciklizni. Az időjárás-előrejelzés szerint a napos idő valószínűsége 0,6, a borúsé és az esősé egyaránt 0,2. Feltéve, hogy Dénes biciklizni ment a hétvégén, mennyi a valószínűsége, hogy borús idő volt a lakóhelyén? (8 pont)

5. Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, amíg nem lesz két fej egymás után, vagy nem lesz egy fej után egy írás. Mennyi a valószínűsége, hogy az FF sorozat előbb jelenik meg, mint az FI sorozat? (10 pont)

6. (beadható feladat október 27-ig) Oldjuk meg a 2. feladatot, ha az összes késés száma 0,03 paraméterű Poisson-eloszlású.

   Az elégséges határa: 21 pont. Várható ponthatárok: 42, 56, 70, 84.

Eredmények

1. Bayes-tétellel
$$\frac{0,95 \cdot 0,08}{0,95 \cdot 0,08 + 0,01 \cdot 0,92} \approx 0,892.$$
2. *a)* $\left(2^{100} - \binom{100}{50}\right)/2^{101}$; *b)* nem.
3. $P(X = k) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdots \frac{90-k+2}{100-k+2} \cdot \frac{10}{100-k+1}, \quad k = 1, \ldots, 91.$
4. 1/3.
5. $\frac{\binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 24}{\binom{32}{4}} \approx 0,016.$

---

1. $\frac{\binom{13}{2} \cdot 13 \cdot 26}{\binom{52}{4}} \approx 0,0974.$
2. *a)* $\left(2^{100} + \binom{100}{50}\right)/2^{101}$; *b)* nem.
3. $P(X = k) = \frac{900}{1000} \cdot \frac{899}{999} \cdots \frac{900-k+2}{1000-k+2} \cdot \frac{100}{1000-k+1}, \quad k = 1, \ldots, 901.$
4. 1/2.
5. Bayes-tétellel
$$\frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,75} = 0,4.$$

---

1. $\frac{10!}{10^{10}}.$
2. 1/4.
3. $\frac{3}{36} \cdot \frac{1}{2^10} + \frac{2}{36} \cdot (11+1) \cdot \frac{1}{2^11} + \frac{1}{36} \cdot \left(\binom{12}{2} + 12 + 1\right) \cdot \frac{1}{2^12} \approx 0,0009155.$
4. Bayes-tétellel $\frac{0,9 \cdot 0,6}{0,9 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,2} = \frac{3}{4}.$
5. 1/2.

---

1. *a)* Nem. *b)* Nem.
2. Binom(21, 0,02): $P(X = k) = \binom{21}{k} \cdot 0,02^k \cdot 0,98^{21-k}, \quad k = 0, \ldots, 21.$
3. $\frac{\binom{14}{3} \cdot 75}{\binom{90}{5}}$: a legkisebb szám 75-féle lehet, 1-75-ig bármi. Ezután a legnagyobb szám is egyértelmű, és a kettő között lévő 14 számból kell még hármat választani.
4. Bayes-tétellel $\frac{0,2 \cdot 0,7}{0,9 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,2} \approx 0,1944.$
5. 1/2.