8. feladatsor, 7. feladat

Legyen t tetszőleges valós szám. Ekkor egyrészt, kétféleképpen felírva annak valószínűségét, hogy a Brown-mozgás a $[0,t]$ intervallumon belül eléri x-et, és használva a Brown-mozgás szimmetriáját:

$$\mathbb{P}(\tau_x \le t) = \mathbb{P}(\max_{0\le s\le t} B_s \ge |x|).$$

Másrészt

$$\mathbb{P}\left(\frac{x^2}{B_1^2} \le t\right) = \mathbb{P}\left(\frac{|x|}{|B_1|} \le \sqrt{t}\right) = \mathbb{P}(|x| \le \sqrt{t}\cdot|B_1|) = \mathbb{P}(|B_t| \ge |x|),$$

hiszen B_t és $\sqrt{t}\cdot B_1$ eloszlása megegyezik (mindkettőé $N(0,t)$).

A tükrözési elv éppen azt mondja, hogy ez a két valószínűség egymással megegyezik.

Mivel minden t-re megegyezik a két valószínűség, τ_x és x^2/B_1^2 eloszlása azonos.

8. feladatsor, 8. feladat

Először számoljunk a B_a mennyiségre feltételesen. A Brown-mozgás erős Markov-tulajdonsága miatt $\tilde{B}_t = B_{t+a} - B_a$ is Brown-mozgás. Ez és a 7. feladat (vagy közvetlenül a tükrözési elv) alapján, ha most $\tilde{\tau}_x$ a $\tilde{B}_t$ folyamat szintelérési idejét jelöli, továbbá $t = b-a, x = B_a$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{nincs nullhely}[a,b]\text{-ben}|B_a) &= \mathbb{P}(\tilde{\tau}_{B_a} > b-a|B_a) = \mathbb{P}(|\tilde{B}_{b-a}| < |B_a|) = \\ &= \mathbb{P}(|B_b - B_a| < |B_a|) = \\ &= \mathbb{P}\Big(\sqrt{b-a}|X| < \sqrt{a}|Y|\Big) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{a}{b}}.\end{aligned}$$

Itt X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók. Ezeket a megfelelő konstansokkal szorozva független, normális eloszlású, 0 várható értékű valószínűségi változókat kapunk, melyek szórása $\sqrt{b-a}$, illetve $\sqrt{a}$. Vagyis az együttes eloszlás megegyezik $B_b - B_a$ és B_a együttes eloszlásával.

Az utolsó lépésben az (X,Y) standard normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének forgásszimmetriáját használtuk, és azt, hogy a megfelelő egyenesek bezárt szöge éppen $\arcsin\sqrt{a/b}$ lesz.

A teljes várható érték tételével tudjuk befejezni a megoldást:

$$\mathbb{P}(\text{nincs nullhely}[a,b]\text{-ben}) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(\text{nincs nullhely}[a,b]\text{-ben}|B_a)) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Megjegyzés. $a \to 0$ limeszt véve az $\arcsin\sqrt{a/b}$ limesze 0. Vagyis a Brown-mozgás gyökhelyeinek a 0 pont 1 valószínűséggel torlódási pontja.