Valószínűségszámítás 1, alkalmazott matematikus bsc, 2016/2017. ősz

Feltételes sűrűségfüggvény

Legyen az (X, Y) valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye a $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény. Ekkor a második peremsűrűségfüggvény, azaz Y sűrűségfüggvénye:

$$h_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)dy.$$

Legyen most $y \in \mathbb{R}$ rögzített. Az X-nek az $Y = y$ feltételre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{h_{X,Y}(x, y)}{h_Y(y)}.$$

Ebből az X-nek az Y-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye így számolható:

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Átlánosabban, ha g megfelelő függvény, akkor

$$\mathbb{E}(g(X)|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Például

$$\mathbb{E}(X^3|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Ha pedig $A \subset \mathbb{R}$ intervallum vagy félegyenes, akkor a

$$\mathbb{P}(X \in A|Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)dx$$

képlet alapján számolhatjuk ki annak az $Y = y$-ra vonatkozó feltételes valószínűségét, hogy $X \in A$. Például

$$\mathbb{P}(X > 1|Y = y) = \int_1^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx,$$

vagy

$$\mathbb{P}(1 < X < 2|Y = y) = \int_1^2 f_{X|Y}(x|y)dx,$$

---

86. feladat. *(X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = e^{-y}$, ha $0 < x < y$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X|Y = y)$-t, $\mathbb{E}(Y|X = x)$-t, továbbá $\mathbb{P}(Y > 1|X = x)$-t (tetszőleges $y > 0$, illetve $x > 0$ esetén).*

Az együttes sűrűségfüggvény: $h(x, y) = e^{-y}\mathbb{I}(0 < x < y)$. (Az $\mathbb{I}$ végig indikátort jelent: értéke 1, ha teljesül a zárójelben szereplő kifejezés, 0 különben.)

Ebből az általános képlet alapján számolhatjuk ki a peremsűrűségfüggvényeket, vagyis X és Y sűrűségfüggvényét:

$$h_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)dy = \int_x^{\infty} e^{-y}dy\mathbb{I}(x \geq 0) = e^{-x}\mathbb{I}(x \geq 0).$$

$$h_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx = e^{-y} \cdot y\mathbb{I}(y > 0).$$

Így már a definíció alapján számolhatjuk az X-nek $Y = y$-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényét:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{h_{X,Y}(x,y)}{h_Y(y)} = \frac{1}{y}\mathbb{I}(0 < x < y)$$

Ebből pedig X-nek az $Y = y$-ra vonatkozó feltételes várható értékét.

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_0^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^y \frac{x}{y}dx = \frac{1}{y}\int_0^y xdx = \frac{1}{y} \cdot \frac{y^2}{2} = \frac{y}{2}.$$

Hasonlóképpen számolhatunk, ha $X = x$ kerül a feltételbe ($x > 0$), előbb a feltételes sűrűségfüggvényét, majd abból integrálással a feltételes várható értékét Y-nak:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{h_{X,Y}(x,y)}{h_X(x)} = \frac{e^{-y}\mathbb{I}(0 < x < y)}{e^{-x}}.$$

Ezután parciális integrálással:

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \frac{\int_x^{\infty} ye^{-y}dy}{e^{-x}} = \frac{[-ye^{-y}]_{y=x}^{\infty} + \int_x^{\infty} e^{-y}dy}{e^{-x}} = \frac{xe^{-x} + e^{-x}}{e^{-x}} = x + 1.$$

A $\mathbb{P}(Y > 1|X = x)$ az általános $\mathbb{P}(Y \in A|X = x) = \int_A f_{Y|X}(y|x)dy$ képlet alapján határozható meg. Vagyis:

$$\mathbb{P}(Y > 1|X = x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-y}\mathbb{I}(0 < x < y)}{e^{-x}}dy = e^x \int_{\max(1,x)} e^{-y}dy.$$

Ha tehát $0 \leq x \leq 1$, akkor $\mathbb{P}(Y > 1|X = x) = e^x \cdot e^{-1} = e^{x-1}$, ha pedig $x > 1$, akkor $\mathbb{P}(Y > 1|X = x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$ (összhangban azzal, hogy $Y \geq X$ mindig teljesül az együttes sűrűségfüggvény alakja miatt, tehát ha $X = x$, és $x > 1$, akkor Y biztosan nagyobb 1-nél).

87. feladat. *(X,Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x,y) = \frac{12}{5}(x+y)$, ha $0 \leq \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y|X = x)$-t $0 \leq x \leq 1$ esetén.*

Az együttes sűrűségfüggvény tehát ilyen alakban írható fel, az indikátoros jelölést használva: $h(x,y) = \frac{12}{5}(x+y)\mathbb{I}\big(0 \leq \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\big)$.

Ebből az általános képlet alapján meghatározzuk X sűrűségfüggvényét, azaz az első peremsűrűségfüggvényt. Ha x negatív, vagy $x/2 > 1 - x/2$, azaz $x > 1$, akkor azonosan nulla lenne az $\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy$ integrál, ilyenkor tehát $h_X(x) = 0$. Ha pedig $0 \leq x \leq 1$, akkor

$$h_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy = \int_{x/2}^{1-x/2} \frac{12}{5}(x+y)dy =$$

$$= \frac{12}{5}x^2 + \frac{6}{5}\left[\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right] = \frac{12}{5}x^2 + \frac{6}{5}(1-x) = \frac{6}{5}(2x^2 - x + 1).$$

Így az Y-nak X-re vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye (a 6/5-tel egyszerűsítve):

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{h(x,y)}{h_X(x)} = \frac{2(x+y)\mathbb{I}(x/2 \le y \le 1 - x/2)}{2x^2 - x + 1},$$

ha $0 < x < 1$. Ebből kaphatjuk meg az Y-nak $X = x$-re vonatkozó feltételes várható értékét:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|X=x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{x/2}^{1-x/2} \frac{y \cdot 2(x+y)}{2x^2 - x + 1} = \\
&= \int_{x/2}^{1-x/2} \frac{2xy + 2y^2}{2x^2 - x + 1} dy = \\
&= \frac{1}{2x^2 - x + 1}\left[x \int_{x/2}^{1-x/2} 2y dy + 2\int_{x/2}^{1-x/2} y^2 dy\right] = \\
&= \frac{1}{2x^2 - x + 1}\left[x\big((1-x/2)^2 - (x/2)^2\big) + 2\left(\frac{(1-x/2)^3}{3} - \frac{(x/2)^3}{3}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2x^2 - x + 1}\left[x(1-x) + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4}\right)\right] = \frac{2/3 - x^2/2 - x^3/6}{2x^2 - x + 1}.
\end{aligned}$$

---

51. feladat. Jordán Károly formuláival: A_i: az i. emeleten megáll a lift; B_k: az $A_1, \ldots, A_{10}$ közül pontosan k darab következik be; $n = 10$; X: a megállások száma. Ekkor indexcseréket ($j = k + i$) és a binomiális tételt alkalmazva:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{10} k \cdot \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{10} k \cdot \sum_{i=0}^{10-k} (-1)^i \binom{k+i}{i} S_{k+i}{}^{(10)} = \\
&= \sum_{j=1}^{10} S_j^{(10)} \cdot \sum_{k=1}^{j} (-1)^{j-k} \cdot k \binom{j}{k} = \\
&= \sum_{j=1}^{10} S_j^{(10)} \cdot \sum_{k=1}^{j} (-1)^{j-k} \cdot j \binom{j-1}{k-1} \stackrel{l=k-1}{=} \\
&= \sum_{j=1}^{10} S_j^{(10)} \cdot j \cdot \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^{j-1-l} \cdot \binom{j-1}{l} = \sum_{j=1}^{10} S_j^{(10)} \cdot j \cdot (1-1)^j = \\
&= S_1^{(10)} = \sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}(A_k) = 10 \cdot \mathbb{P}(A_1) = 10 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{15}\right).
\end{aligned}$$