1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi folyamatok mindegyike martingál.

   a) $S_n, S_n^2 - n, Y_n = t^n \left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^{S_n}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $0 < t < 1$ rögzített, (S_n) egyszerű szimmetrikus bolyongás.

   b) $Z_n = 2^n \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

   c) $Z_n = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n\lambda^2}{2}\right)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $\lambda > 0$ rögzített, $X_1, X_2, \ldots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg azt is, hogy
   $$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left(\sum_{i=1}^k X_i - \frac{\alpha k}{2}\right) > \beta\right) \le e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta > 0)\,.$$

   d) $Z_n = \left(\lambda^n \prod_{i=1}^n (X_{2i-1} + X_{2i})\right)^{-1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

2. Mutassuk meg, hogy $(I(\nu > n)\,,\, \mathcal{F}_n)$ szupermartingál és $(I(\nu \le n)\,,\, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, ha ν megállási idő.

3. Legyenek az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, $E(X_n) = 0$, $D^2(X_n) = \sigma_n^2$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Mutassuk meg, hogy $S_n^2 - B_n^2$ martingál.

4. Egy részeg ember bolyong a síkon a lámpaoszloptól indulva. Minden lépése egységnyi hosszúságú, az iránya viszont véletlenszerű. Jelölje X_n a távolságát az oszloptól n lépés után. Mutassuk meg, hogy $X_n^2 - n$ martingál.

5. (+) Egy urnában a piros és b kék golyó van. Minden húzásnál kiveszünk egy darabot véletlenszerűen egyenletesen, és c olyan színű golyót teszünk az urnába, amilyen színűt húztunk. Bizonyítsuk be, hogy a piros golyók aránya 1 valószínűséggel konvergál, amint a húzások száma végtelenhez tart. Mi a limesz eloszlása?

6. Mihez tart n szabályos kockadobás mértani közepe? Pontosabban legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, szabályos kockadobások. Mihez tart az $\sqrt[n]{X_1 \ldots X_n}$ sorozat 1 valószínűséggel, amint $n \to \infty$?

7. (+) Legyen X_n a következő tulajdonságú, $[0,1]$-beli értékeket felvevő valószínűségiváltozó-sorozat: $X_1 = a$ valamely $0 < a < 1$-re és
   $$P\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\middle|\mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n; \quad P\left(X_{n+1} = \frac{X_n + 1}{2}\middle|\mathcal{F}_n\right) = X_n.$$
   Mutassuk meg, hogy X_n L_1-ben konvergens martingál. Adjuk meg X_∞ eloszlását.

8. Mutassuk meg, hogy ha az X_n szubmartingálra $E(X_n) = E(X_1)$ minden n-re, akkor X_n martingál.

9. Legyen $a, b > 0$, tegyük fel, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$ és $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál. Ekkor $(aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n)$ és $(\max(X_n, Y_n), \mathcal{F}_n)$ is szubmartingál. Fogalmazzuk meg az analóg állításokat szupermartingálokra!

10. Legyen X_n független valószínűségi változók sorozata a következő eloszlással: $P(X_n = 1/2) = P(X_n = 3/2) = 1/2$. Legyen $Y_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$. Mutassuk meg, hogy martingál. Hova konvergál?

11. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók az alábbi eloszlással:
    $$P(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2}; \quad P\left(X_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$
    Mutassuk meg, hogy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ martingál a természetes σ-algebrasorozatra nézve. Mihez tart?

1. Legyen X_p geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel. Határozzuk meg pX_p határeloszlását (eloszlásbeli limeszét), amint $p \to 0$.

2. Tegyük fel, hogy egy mérést akárhányszor meg tudunk ismételni, a mérési eredmények legyenek $X_1, X_2, \ldots$. Továbbá feltételezzük, hogy ezek a valószínűségi változók egymástól függetlenek, azonos eloszlásúak, és $\mathbb{E}(X_1) = 176$, $\mathbb{D}(X_1) = 8$.

3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?

4. A ξ_n valószínűségi változó Gamma(n, λ) eloszlású. Mennyi
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\lambda\xi_n - n}{\sqrt{n}} < 1,96\right)?$$

5. Legyen X_λ Poisson-eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke λ. Határozzuk meg $(X_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ határeloszlását, amint $\lambda \to \infty$.

6. Legyen az X_n valószínűségi változó n rendű és p paraméterű negatív binomiális valószínűségi változó. Számítsuk ki $\frac{pX_n - n}{\sqrt{n(1-p)}}$ határeloszlását, amint $n \to \infty$.

7. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók, eloszlásuk: $P(\xi_n = 1) = 1/n$, $P(\xi_n = 0) = 1 - 1/n$. Mihez tart eloszlásban $n \to \infty$ esetén
$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - \mathbb{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{D(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}?$$

8. Minden pozitív egész n-re a $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,n}$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak, úgy, hogy
$$\mathbb{P}(\xi_{n,k} = \sqrt{n}) = \mathbb{P}(\xi_{n,k} = -\sqrt{n}) = 1/2n, \ \mathbb{P}(\xi_{n,k} = 0) = (n-1)/n.$$
Mihez tart eloszlásban $n \to \infty$ esetén
$$\frac{\xi_{n,1} + \xi_{n,2} + \ldots + \xi_{n,n}}{\sqrt{n}D(\xi_{n,1})}?$$

9. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy minden x-re $n \to \infty$ esetén
$$\mathbb{P}\left(\frac{4\sum_{k=1}^{n} kX_k - n^2}{n^{3/2}} < x\right) \to \Phi\left(\frac{3x}{2}\right).$$

1. Legyen az $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó eloszlása a következő:

$$\mathbb{P}(X_n = n^2) = \mathbb{P}(X_n = -n^2) = 1/\sqrt{n}; \quad \mathbb{P}(X_n = 1/n^2) = \mathbb{P}(X_n = -1/n^2) = 1/2 - 1/\sqrt{n}.$$

   Konvergens-e az (X_n) sorozat eloszlásban, illetve sztochasztikusan? Ha igen, mi a limesz?

2. Az (Y_n) valószínűségi változó legyen egyenletes eloszlású az $\{0, 1/n, 2/n, \ldots, 1\}$ halmazon (vagyis Y_n a halmaz minden elemét azonos valószínűséggel veszi fel). Konvergens-e (Y_n) eloszlásban?

3. Mutassuk meg, hogy ha $c \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és a (ξ_n) valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál c-hez, akkor $\xi_n \to c$ sztochasztikusan is.

4. Mutassuk meg, hogy ha ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $\xi_n \to \xi$ eloszlásban és $\eta_n \to 0$ sztochasztikusan, akkor *a)* $\xi_n + \eta_n \to \xi$ eloszlásban; *b)* $\xi_n \eta_n \to 0$ sztochasztikusan.

5. $\xi_n \to \xi$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $\xi_n - \xi \to 0$ eloszlásban?

6. Mutassunk arra példát, hogy ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.

7. Bizonyítsuk be, hogy az (X_n) valószínűségi változók sorozata pontosan akkor konvergál sztochasztikusan az X valószínűségi változóhoz, ha minden (X_{n_k}) részsorozatnak van olyan részsorozata, mely 1 valószínűséggel konvergál X-hez.

8. Mutassunk meg példákkal, hogy az L^1-beli konvergencia és az 1 valószínűségi konvergencia közül egyikből sem következik a másik.

9. Legyenek (X_n) és X valószínűségi változók nemnegatívak és véges várható értékűek. Mutassuk meg, hogy $X_n \to X$ pontosan akkor teljesül L^1-ben, ha $X_n \to X$ sztochasztikusan és $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.

10. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, hogy $P\left(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ végtelen sok } n\text{-re }\right) = 0$.

1. (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = e^{-y}$, ha $0 < x < y$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X|Y)$-t és $\mathbb{E}(Y|X)$-t.

2. (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \frac{12}{5}(x + y)$, ha $0 \le \frac{x}{2} \le y \le 1 - \frac{x}{2}$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y|X)$-t.

3. Legyenek X, Y, Z független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

   a) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X + Y + 3Z|X - Y)$ feltételes várható értéket.

   b) Határozzuk meg az $\mathbb{E}(Z(X + Y)|Z)$ feltételes várható értéket.

   c) Határozzuk meg az $\mathbb{E}((X^2 + Y^2)Z^2|Z)$ feltételes várható értéket.

4. Legyen az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Az N valószínűségi változó X-re vonatkozó feltételes eloszlása pedig Poisson(λ)-eloszlás. Határozzuk meg N eloszlását.

5. Az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $e^{-t^2/2}$. Milyen eloszlású X?

6. Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $X + Y$ karakterisztikus függvényét és eloszlását.

7. Az X valószínűségi változó 1/2 valószínűséggel 1, 1/2 valószínűséggel -1, Y ugyanilyen eloszlású, X-től független. Számítsuk ki $X - Y$ karakterisztikus függvényét.

8. Legyenek X és Y független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, rendre λ és μ paraméterekkel. Milyen eloszlású $X + Y$?

9. Legyen $\varphi(t) = t + 1$, ha $-1 \le t \le 0$, $\varphi(t) = 1 - t$, ha $0 \le t \le 1$, és 0 különben. Van-e olyan valószínűségi változó, aminek a karakterisztikus függvénye φ?

10. Legyen φ az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Van-e olyan valószínűségi változó, melynek karakterisztikus függvénye $|\varphi(t)|^2$?

11. Mutassuk meg, hogy ha létezik $t_0 \neq 0 : |\Phi(t_0)| = 1$, akkor a megfelelő eloszlás rácsos (azaz a tartója egy α valós szám összes egész számú többszöröséből áll, a negatív együtthatósakat is beleértve).

12. Van-e olyan valószínűségi változó, amelynek karakterisztikus függvénye $\cos t$? Van-e olyan, amelynek karakterisztikus függvénye a) $\cos t$; b) $\frac{\sin t}{t}$; c) $\cos^2 t$? d) $e^{-|t|}$? e) $\frac{\sin t}{2t}$? f) $\frac{\sin(t/2)}{(t/2)}$?

13. Határozzuk meg n darab független Cauchy-eloszlású valószínűségi változó átlagának eloszlását. A Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvénye: $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

14. a) Legyenek X, Y független 1/6 paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki $X - Y$ karakterisztikus függvényét. b) Az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak. $X_1 + \ldots + X_n$ karakterisztikus függvénye $e^{-t^2/2}$. Milyen eloszlású X_1?

Inverziós formula: Az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye φ, azaz $\varphi(t) = E(e^{itX})$. Ekkor

$$\lim_{c \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt = P(a < X < b) + \frac{1}{2} P(X = a) + \frac{1}{2} P(X = b).$$

Ha $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$, akkor X-nek létezik sűrűségfüggvénye, és $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$.

1. Számoljuk ki az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ sűrűségfüggvényű $N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlás várható értékét és szórásnégyzetét.

2. Számoljuk ki a standard normális eloszlás pozitív egész rendű momentumait.

3. Legyen X és Y független és standard normális eloszlású. Számoljuk ki
$$(1 + X^2 + Y^2)^{-3/2} \exp\left(\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)\right)$$
várható értékét.

4. Számítsuk ki a gamma-eloszlás várható értékét, szórását és tetszőleges rendű momentumait.

5. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független p-indikátorok. Mihez konvergál az $(X_1^5 + ... + X_n^5)/n$ sorozat 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$?

6. X_i jelölje az i. kockadobás eredményét. Mihez konvergál az $(X_1^2 + ... + X_n^2)/n$ sorozat 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$?

7. Legyen X egységnyi paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Adjuk meg $|X - 2|$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és várható értékét.

8. Mutassuk meg, hogy ha $c \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és a (ξ_n) valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál c-hez, akkor $\xi_n \to c$ sztochasztikusan is.

9. Mutassuk meg, hogy ha ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $\xi_n \to \xi$ eloszlásban és $\eta_n \to 0$ sztochasztikusan, akkor *a)* $\xi_n + \eta_n \to \xi$ eloszlásban; *b)* $\xi_n \eta_n \to 0$ sztochasztikusan.

10. $\xi_n \to \xi$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $\xi_n - \xi \to 0$ eloszlásban?

11. Mutassunk arra példát, hogy ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.

12. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, hogy $P\left(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ végtelen sok } n - \text{re }\right) = 0$.

Valószínűségszámítás **3. feladatsor** 2015. szeptember 24.

1. U és V független valószínűségi változók f és g sűrűségfüggvénnyel. Határozzuk meg $U - V$ sűrűségfüggvényét.

2. Legyenek X és Y független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $X - Y$ és $X + Y$ sűrűségfüggvényét.

3. Legyenek U és V független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $U + V$ és $U - V$ együttes eloszlását. Milyen eloszlású $U + V$? Milyen eloszlású $U - V$?

4. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, X eloszlása $\Gamma_{a,\lambda}$, Y eloszlása $\Gamma_{b,\lambda}$ (itt a, b, λ pozitív számok). Mutassuk meg, hogy $X + Y$ és $\frac{X}{X+Y}$ függetlenek. Milyen eloszlású $X + Y$? Határozzuk meg $\frac{X}{X+Y}$ sűrűségfüggvényét.

5. A q szabadsági fokú χ^2-eloszlás q darab független standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzetösszegének eloszlása. Határozzuk meg a sűrűségfüggvényét.

6. Legyenek U és V független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket: $\mathbb{P}(U < V)$, $\mathbb{P}(2U < 3V)$, $\mathbb{P}(U < |V|)$, $\mathbb{P}(2 < |U| + |V| < 3)$.

7. $^{(+)}$ U és V legyenek független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg U/V eloszlását.

8. Legyenek U_1 és U_2 a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású, független valószínűségi változók. Legyen
$$X_1 = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2), \qquad X_2 = \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2).$$
Mutassuk meg, hogy X_1 és X_2 független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

9. Az X valószínűségi változó várható értéke 0, és $E|X| = 1$ érvényes. Mennyi $\max(0, X)$ várható értéke?

10. Mutassuk meg, hogy az X valószínűségi változók várható értéke pontosan akkor létezik, amikor $[X]$-é, továbbá $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[X]$ pontosan akkor teljesül, ha X egész értékű.

---

11. U és V független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg az a) $(2U + 3V, -U + V)$ b) $(U + V, U - 2V)$ valószínűségi vektorváltozók együttes sűrűségfüggvényét.

12. Az X valószínűségi vektorváltozó legyen egyenletes eloszlású
a) az $\{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ egységnégyzeten;
b) az $\{(x, y) : 0 \leq x < y \leq 1\}$ háromszögön.
Mindkét esetben számítsuk ki X eloszlás– és sűrűségfüggvényét, valamint a peremeloszlások eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

1. Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F, $a > 0, b \in \mathbb{R}$ adott számok. Mi $aX + b$ eloszlásfüggvénye? Ha X abszolút folytonos eloszlású, mi $aX + b$ sűrűségfüggvénye?
2. Milyen a és b értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény: $F(x) = \exp(-be^{-ax})$?
3. Legyen F folytonos eloszlásfüggvény, amire $F(0) = 0$. A G függvényt a következőképpen definiáljuk: $G(x) = 0$ (ha $x \leq 1$), $G(x) = F(x) - F(1/x)$ (ha $x > 1$). Mutassuk meg, hogy G is eloszlásfüggvény.
4. Sűrűségfüggvények-e az alábbi függvények?
   (a) $f(x) = \sin x \cdot \mathbb{I}(x \in (0, 3\pi/2))$.
   (b) $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
5. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon. Határozzuk meg $\mathrm{tg}(X)$ sűrűségfüggvényét.
6. Legyen Y exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Határozzuk meg $1 - e^{-\lambda Y}$ sűrűségfüggvényét.
7. X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mi X^2 sűrűségfüggvénye?
8. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paraméterrel. Legyen $Y = \min_k X_k$. Milyen eloszlású Y?

---

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eloszlásfüggvény, és $a > 0$, akkor $[F(x)]^a$ is eloszlásfüggvény.
10. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, 1)$ intervallumon. Az intervallumot X két részre osztja. Jelöljük a hosszabb hosszát Y_1-gyel, a rövidebbét Y_2-vel. Határozzuk meg eloszlásfüggvényeiket.
11. Tegyük fel, hogy egy adott címre az egy óra alatt érkező e-mailek száma 4 várható értékű a) Poisson-eloszlású; b) binomiális eloszlású $p = 0,004$ paraméterrel és n paraméterrel. Határozzuk meg n-t, majd írjuk fel a megfelelő Poisson–, illetve binomiális eloszlást. Mennyi annak valószínűsége, hogy egy óra alatt pontosan 3, 4 illetve 5 e-mail érkezik a Poisson-esetben, illetve a binomiális esetben?
12. Legyen X egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon. Számítsuk ki X^3 eloszlás– és sűrűségfüggvényét.
13. $^{(+)}$ Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy X törtrésze és egészrésze függetlenek.

1. Az X valószínűségi változó a $[0, c]$ intervallumon veszi fel értékeit és ott sűrűségfüggvénye x^2. Határozzuk meg c értékét és annak valószínűségét, hogy $1 < X < 3$.

2. Válasszunk egy pontot találomra, egyenletesen az egységnégyzetből, azaz $[0, 1] \times [0, 1]$- ből, legyen ez (X, Y). a) Számítsuk ki $X + Y$ eloszlás– és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét. b) Számítsuk ki $Z = -\ln(XY)$ sűrűségfüggvényét és várható értékét.

3. Nagyon gyakori, hogy egy részvény árfolyamáról feltételezik, hogy logaritmusa normális eloszlású (μ várható értékkel és σ szórással). Határozzuk meg sűrűségfüggvényét.

4. A LOM részvény tőzsdei záróárfolyama 7800 Ft volt ma este. Korábbi tapasztalatok alapján feltételezzük, hogy holnapi záróárfolyama a mai záróárfolyammal osztva $(0, 001, 0, 01)$ paraméterű lognormális eloszlású. Mennyi annak valószínűsége, hogy a holnapi záróárfolyam kisebb lesz 7500 Ft-nál?

5. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású ($\alpha > 0, \beta > 0$), ha eloszlásfüggvénye $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^\alpha, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$ A Piroska Biztosító felelősségi kárairól tudják, hogy millió forintban számolva $(1, 2)$ paraméterű Pareto-eloszlásúak. Ha egy kárról tudjuk, hogy meghaladta az 1 millió forintot, mennyi annak valószínűsége, hogy nem haladja meg a 3 millió forintot?

6. Mutassuk meg, hogy ha az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású, akkor $\ln(1 + X/\beta)$ exponenciális eloszlású α paraméterrel.

7. X az (a, b) intervallumból (a végpontok lehetnek végtelenek is) veszi fel értékeit, és ott eloszlásfüggvénye F, ami folytonos és szigorúan monoton. Mutassuk meg, hogy ekkor X-et saját eloszlásfüggvényébe beleírva (azaz $F(X)$-et tekintve) a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót kapunk.

8. Számítógépünkbe csak egy véletlen függvény van beépítve. Ennek segítségével a $[0, 1]$ intervallumból tudunk egy véletlen számot generálni egyenletes eloszlás szerint. Ezt felhasználva hogyan lehet tetszőlegesen előírt F eloszlásfüggvényű véletlen számot előállítani?

9. A hidrológiában, távközlésben, biológiában és más területeken az egyik leggyakrabban alkalmazott eloszlás a gamma eloszlás. Egy valószínűségi változó gamma eloszlású, ha sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0; \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$
ahol $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$. $\lambda > 0$ az eloszlás paramétere, $\alpha > 0$ pedig a rendje. Jelölése $\Gamma_{\alpha,\lambda}$. Mutassuk meg, hogy az imént definiált f függvény valóban sűrűségfüggvény.

10. $X_1, \ldots, X_n$ független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Sorbarendezve az $X_1^* \leq X_2^* \leq \ldots \leq X_n^*$ sorozatot kapjuk belőlük.

    a) Határozzuk meg X_k^* eloszlását.

    b) Határozzuk meg $(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ együttes eloszlását, és mutassuk meg, hogy ez megegyezik
$$\left(\frac{Y_1}{Y_1 + \ldots + Y_{n+1}}, \frac{Y_1 + Y_2}{Y_1 + \ldots + Y_{n+1}}, \ldots, \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{Y_1 + \ldots + Y_{n+1}} \right)$$
együttes eloszlásával, ahol $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ független, azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók.