Valószínűségszámítás **9. feladatsor** 2013. december 9.

1. Legyen S_n bolyongás: 0-ból indulva minden lépésben a korábbiaktól függetlenül p valószínűséggel felfelé, $q = 1 - p$ valószínűséggel lefelé lépünk egyet. S_n azt jelöli, hogy hova érkezünk n lépés után.

   a) Milyen c-re igaz, hogy $S_n - nc$ martingál?

   b) Bizonyítsuk be, hogy $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ martingál.

   c) Legyen τ az első olyan időpont, amikor a bolyongás elér 10-be vagy -5-be. Bizonyítsuk be, hogy τ megállási idő.

   d) Mennyi annak valószínűsége, hogy $S_\tau = 10$, vagyis a bolyongás hamarabb ér 10-be, mint -5-be?

   e) Határozzuk meg τ várható értékét.

1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi folyamatok mindegyike martingál.

   a) $S_n, S_n^2 - n, Y_n = t^n \left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^{S_n}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $0 < t < 1$ rögzített, (S_n) egyszerű szimmetrikus bolyongás.

   b) $Z_n = 2^n \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

   c) $Z_n = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n\lambda^2}{2}\right)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $\lambda > 0$ rögzített, $X_1, X_2, \ldots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg azt is, hogy

   $$\mathbb{P}\left(\max_{1 \le k \le n}\left(\sum_{i=1}^k X_i - \frac{\alpha k}{2}\right) > \beta\right) \le e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

   d) $Z_n = \left(\lambda^n \prod_{i=1}^n (X_{2i-1} + X_{2i})\right)^{-1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

2. Mutassuk meg, hogy $(I(\nu > n), \mathcal{F}_n)$ szupermartingál és $(I(\nu \le n), \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, ha ν megállási idő.

1. A ξ_n valószínűségi változó Gamma(n, λ) eloszlású. Mennyi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\lambda\xi_n - n}{\sqrt{\alpha}} < 1,96\right)?$$

2. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók, eloszlásuk: $P(\xi_1 = 1) = 1/n$, $P(\xi_1 = 0) = 1 - 1/n$. Mihez tart eloszlásban $n \to \infty$ esetén

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - E(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{D(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}?$$

3. Minden pozitív egész n-re a $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,n}$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak, úgy, hogy

$$P(\xi_{n,k} = \sqrt{n}) = P(\xi_{n,k} = -\sqrt{n}) = 1/2n,\ P(\xi_{n,k} = 0) = (n-1)/n.$$

Mihez tart eloszlásban $n \to \infty$ esetén

$$\frac{\xi_{n,1} + \xi_{n,2} + \ldots + \xi_{n,n}}{\sqrt{n}D(\xi_{n,1})}?$$

4. (beadható december 2-ig) n sofőr közösen használ egy autót úgy, hogy minden nap sorsolással döntik el, hogy ki vezessen aznap. Jelölje $\mu(n)$ azt a legkisebb természetes számot, amire igaz, hogy egy adott naptól kezdve sofőrök közül ennyi nap elteltével mindenki vezette az autót legalább egyszer. Határozzuk meg, hogy mihez tart $\frac{\mu(n) - n\log n}{n}$ eloszlásban $n \to \infty$ esetén.

5. A CTF csapat kemény magja 500 ETU szurkolót bántalmazott. A korábbi évek tapasztalata alapján a CTF csapat vezetősége tudja, hogy a vendégcsapat szurkolói a (0,5) intervallumon egyenletes eloszlású (millió forintban) kártérítési igényeket fognak nekik benyújtani egymástól függetlenül. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a CTF csapat legalább 500 millió forintot fog kifizetni, ha a NYUGI Biztosító a károk 2 millió Ft alatti részét fizeti ki, a GIC Biztosító pedig a károk 4 millió forint feletti részét!

6. Az Üveghegyen túli Királyság döntő ütközetre készül a sárkányok által tüzelt SMF-el. A király a fegyverek költségét békekölcsönnel kívánja fedezni. Az 100 nemes mindegyike 100 fityingért jegyez békekölcsönt, a polgárok mindegyike (400-an vannak) 1000 fityinget fizet, az 500 paraszt 200 fityinget kell fizessen. A király népszerűségének fenntartásáért minden békekölcsön sorsoláson vesz részt. A nemesek 5%-os eséllyel 10000 fityinget és 10%-os eséllyel 2000 fityinget. A parasztok és polgárok 5%-os eséllyel 4000 illetve 5000 fityinget nyerhetnek. A királyi kincstárban a békekölcsön jegyzése előtt 1000 fitying volt. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy nem lesz elég pénz a nyeremények kifizetésére, ha a nyereményeket függetlenül sorsolják ki!

7. Mihez tart n szabályos kockadobás mértani közepe? Pontosabban legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, szabályos kockadobások. Mihez tart az $\sqrt[n]{X_1 \ldots X_n}$ sorozat 1 valószínűséggel, amint $n \to \infty$?

8. (beadható december 2-ig) A véletlenszám–táblázatból elhagyjuk azokat a számokat, amelyek hárommal oszthatók, mindaddig, amíg 1025 ilyen számot nem találunk (minden szám a többitől függetlenül 1/3 valószínűséggel osztható hárommal). Mennyi annak valószínűsége közelítőleg, hogy ehhez legalább 2500 számot tartalmazó táblázatra van szükségünk?

Valószínűségszámítás **7. feladatsor** 2013. november 11.

1. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?

2. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?

3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?

Valószínűségszámítás **6. feladatsor** 2013. november 4.

1. Az X valószínűségi változó egész értékű, karakterisztikus függvénye φ. Adjuk meg X eloszlását, vagyis fejezzük ki a $P(X = k)$ valószínűségeket (minden $k \in \mathbb{Z}$-re) a φ függvény segítségével (ehhez használhatjuk az inverziós formulát).

2. Az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $e^{-t^2/2}$. Milyen eloszlású X?

3. Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $X + Y$ karakterisztikus függvényét és eloszlását.

4. Az X valószínűségi változó $1/2$ valószínűséggel 1, $1/2$ valószínűséggel -1, Y ugyanilyen eloszlású, X-től független. Számítsuk ki $X - Y$ karakterisztikus függvényét.

5. Legyen $\varphi(t) = t + 1$, ha $-1 \le t \le 0$, $\varphi(t) = 1 - t$, ha $0 \le t \le 1$, és 0 különben. Van-e olyan valószínűségi változó, aminek a karakterisztikus függvénye φ?

6. (beadható november 11-ig) a) Legyen X λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a karakterisztikus függvényét. b) Bizonyítsuk be, hogy független Poisson-eloszlású valószínűségi változók összege is Poisson-eloszlású, és a paraméterek összeadódnak.

Inverziós formula: Az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye φ, azaz $\varphi(t) = E(e^{itX})$. Ekkor

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt = P(a < X < b) + \frac{1}{2}P(X = a) + \frac{1}{2}P(X = b).$$

Ha $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|dt < \infty$, akkor X-nek létezik sűrűségfüggvénye, és $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt$.

Valószínűségszámítás **5. feladatsor** 2013. október 21.

1. Mutassuk meg, hogy ha $c \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és a (ξ_n) valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál c-hez, akkor $\xi_n \to c$ sztochasztikusan is.
2. Mutassuk meg, hogy ha ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $\xi_n \to \xi$ eloszlásban és $\eta_n \to 0$ sztochasztikusan, akkor *a)* $\xi_n + \eta_n \to \xi$ eloszlásban; *b)* $\xi_n \eta_n \to 0$ sztochasztikusan.
3. $\xi_n \to \xi$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $\xi_n - \xi \to 0$ eloszlásban?
4. Mutassunk arra példát, hogy ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.
5. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, hogy $P\left(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ végtelen sok } n-\text{re }\right) = 0$.
6. (beadható november 4-ig) a) Legyenek X, Y független $1/6$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki $X - Y$ karakterisztikus függvényét. b) Az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak. $X_1 + \ldots + X_n$ karakterisztikus függvénye $e^{-t^2/2}$. Milyen eloszlású X_1?

Valószínűségszámítás **5. feladatsor** 2013. október 21.

1. Mutassuk meg, hogy ha $c \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és a (ξ_n) valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál c-hez, akkor $\xi_n \to c$ sztochasztikusan is.
2. Mutassuk meg, hogy ha ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $\xi_n \to \xi$ eloszlásban és $\eta_n \to 0$ sztochasztikusan, akkor *a)* $\xi_n + \eta_n \to \xi$ eloszlásban; *b)* $\xi_n \eta_n \to 0$ sztochasztikusan.
3. $\xi_n \to \xi$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $\xi_n - \xi \to 0$ eloszlásban?
4. Mutassunk arra példát, hogy ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.
5. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, hogy $P\left(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ végtelen sok } n-\text{re }\right) = 0$.
6. (beadható november 4-ig) a) Legyenek X, Y független $1/6$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki $X - Y$ karakterisztikus függvényét. b) Az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak. $X_1 + \ldots + X_n$ karakterisztikus függvénye $e^{-t^2/2}$. Milyen eloszlású X_1?

1. U és V független valószínűségi változók f és g sűrűségfüggvénnyel. Határozzuk meg $U - V$ sűrűségfüggvényét.

2. Legyenek U és V független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Milyen eloszlású $U + V$?

3. A q szabadsági fokú χ^2-eloszlás q darab független standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzetösszegének eloszlása. Határozzuk meg a sűrűségfüggvényét.

4. X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a) az (X, Y) b) a $(2X + 3Y, -X + Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvényét.

5. X és Y függetlenek, eloszlásuk rendre $\Gamma(a, \lambda)$ és $\Gamma(b, \lambda)$. Bizonyítsuk be, hogy $X+Y$ és $X/(X+Y)$ függetlenek, és határozzuk meg az eloszlásukat.

6. (beadható október 14-ig) ξ es η legyenek független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg ξ/η eloszlását.

7. $X_1, \ldots, X_n$ független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Sorbarendezve az $X_1^* \le X_2^* \le \ldots \le X_n^*$ sorozatot kapjuk belőlük.

   a) Határozzuk meg X_k^* eloszlását.

   b) Határozzuk meg $(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ együttes eloszlását, és mutassuk meg, hogy ez megegyezik

$$\left(\frac{Y_1}{Y_1 + \ldots + Y_{n+1}}, \frac{Y_1 + Y_2}{Y_1 + \ldots + Y_{n+1}}, \ldots, \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{Y_1 + \ldots + Y_{n+1}} \right)$$

   együttes eloszlásával, ahol $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ független, azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

8. Az X valószínűségi változó várható értéke 0, és $E|X| = 1$ érvényes. Mennyi $\max(0, X)$ várható értéke?

1. Az X valószínűségi változó a $[0, c]$ intervallumon veszi fel értékeit és ott sűrűségfüggvénye x^2. Határozzuk meg c értékét és annak valószínűségét, hogy $1 < X < 3$.

2. Válasszunk egy pontot találomra, egyenletesen az egységnégyzetből, azaz $[0, 1] \times [0, 1]$- ből. Jelölje ξ a választott pont két koordinátájának az összegét. Számítsuk ki ξ eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

3. Nagyon gyakori, hogy egy részvény árfolyamáról feltételezik, hogy logaritmusa normális eloszlású. Határozzuk meg sűrűségfüggvényét.

4. A LOM részvény tőzsdei záróárfolyama 7800 Ft volt ma este. Korábbi tapasztalatok alapján feltételezzük, hogy holnapi záróárfolyama a mai záróárfolyammal osztva $(0,001, 0,01)$ paraméterű lognormális eloszlású. Mennyi annak valószínűsége, hogy a holnapi záróárfolyam kisebb lesz 7500 Ft-nál?

5. Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású $(\alpha > 0, \beta > 0)$, ha eloszlásfüggvénye $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$ A Piroska Biztosító felelősségi kárairól tudják, hogy millió forintban számolva $(1, 2)$ paraméterű Pareto-eloszlásúak. Ha egy kárról tudjuk, hogy meghaladta az 1 millió forintot, mennyi annak valószínűsége, hogy nem haladja meg a 3 millió forintot?

6. Mutassuk meg, hogy ha az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású, akkor $\ln(1 + X/\beta)$ exponenciális eloszlású α paraméterrel.

7. X az (a, b) intervallumból (a végpontok lehetnek végtelenek is) veszi fel értékeit, és ott eloszlásfüggvénye F, ami folytonos és szigorúan monoton. Mutassuk meg, hogy ekkor X-et saját eloszlásfüggvényébe beleírva (azaz $F(X)$-et tekintve) a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót kapunk.

8. Számítógépünkbe csak egy véletlen függvény van beépítve. Ennek segítségével a $[0, 1]$ intervallumból tudunk egy véletlen számot generálni egyenletes eloszlás szerint. Ezt felhasználva hogyan lehet tetszőlegesen előírt F eloszlásfüggvényű véletlen számot előállítani?

9. A hidrológiában, távközlésben, biológiában és más területeken az egyik leggyakrabban alkalmazott eloszlás a gamma eloszlás. Egy valószínűségi változó gamma eloszlású, ha sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0; \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$
ahol $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$. $\lambda > 0$ az eloszlás paramétere, $\alpha > 0$ pedig a rendje. Jelölése $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Mutassuk meg, hogy az imént definiált f függvény valóban sűrűségfüggvény.

10. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, \pi)$ intervallumon. Mi $\mathrm{tg}(X)$ sűrűségfüggvénye?

11. X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mi X^2 sűrűségfüggvénye?

12. Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F, a, b adott számok. Mi $aX + b$ eloszlásfüggvénye?

13. Legyen F folytonos eloszlásfüggvény, amire $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy $G(x) = 0$ (ha $x < 1$), $G(x) = F(x) - F(1/x)$ (ha $x > 1$) is eloszlásfüggvény.

A feladatsorok letölthetők a `http://www.cs.elte.hu/~agnes/gyak` oldalról. A feladatok egy része és további példák találhatók itt: `http://www.cs.elte.hu/~zempleni/bev_val.pdf`

1. Egy kalapban cédulák vannak a következő számokkal:

$$\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 51, 52, 61\}.$$

Véletlenszerűen kihúzunk egy cédulát, mindegyiket egyenlő valószínűséggel választva. Jelölje X az első, Y a második számjegyét. Számítsuk ki az alábbiakat:

a) $P(X = 3)$;

b) $P(X = k)$ minden $k = 1, 2, \dots, 6$ számra, azaz X eloszlása;

c) $P(X = 3 \mid Y = 4)$;

d) $P(X = 3 \mid X + Y \geq 5)$;

e) $P(X + Y \geq 5 \mid X = 3)$.

f) Igaz-e, hogy az $\{X = 3\}$ és $\{X + Y \geq 5\}$ események függetlenek? Igaz-e, hogy X és Y függetlenek? Igaz-e, hogy X és $X + Y$ függetlenek?

g) $E(X)$, azaz X várható értéke;

h) $D(X)$, azaz X szórása;

i) $E(X + Y)$, azaz $X + Y$ várható értéke;

j) (beadható szeptember 26-ig) $D(X + Y)$, azaz $X + Y$ szórása;

k) (beadható szeptember 26-ig) $\mathrm{cov}(X, X + Y)$, azaz X és $X + Y$ kovarianciája, és $R(X, X + Y)$, azaz X és $X + Y$ korrelációs együtthatója.

l) $E(X + Y \mid X = 3)$, azaz $X + Y$ feltételes várható értéke az $X = 3$ eseményre vonatkozóan.

2. Két kockadobásból az első eredményét jelöljük X-szel, a másodikét Y-nal. A következő eseményeket vizsgáljuk:
A1: 2 osztója X-nek, 3 Y-nak. A2: 2 osztója Y-nak, 3 X-nek. A3: Y osztója X-nek.
A4: X osztója Y-nak. A5: 2 osztója $X + Y$-nak. A6: 3 osztója $X + Y$-nak.
Melyek lesznek közülük függetlenek?

3. Vegyük a következő egyszerű modellt. Napos és esős napok vannak. Napos után 2/3 valószínűséggel jön újra napos, esős után pedig 1/4 valószínűséggel marad esős. A mai nap napos. Mennyi a valószínűsége, hogy szerdán (azaz két nap múlva) esni fog? Mennyi a valószínűsége, hogy csütörtökön esni fog?

4. Egy kör alakú asztal körül $2n$ hely van. n házaspár tagjai véletlenszerűen leülnek az asztal köré, a $2n$ ember minden lehetséges ülésrendje egyformán valószínű.

a) Legyen $n = 3$. Mennyi a valószínűsége, hogy a második házaspár tagjai egymás mellé ülnek? Mennyi a valószínűsége, hogy a második házaspár tagjai egymás mellé ülnek, feltéve, hogy az első házaspár tagjai egymás mellé ültek?

b) Legyen $n = 10$. Legyen I_j annak az indikátora, hogy a j. házaspár egymás mellett ül ($j = 1, \dots, 10$). Igaz-e, hogy I_1 és I_2 függetlenek? Mennyi I_1 és I_2 kovarianciája? Mennyi az egymás mellé kerülő házaspárok számának várható értéke és szórása?

5. Egy osztályban 17 fiú és 12 lány van. Egy héten négy matekóra van. Minden órán kiválasztanak egy felelőt a) úgy, hogy egy héten négy különböző ember felel; b) tetszőlegesen. Mennyi az egy hét alatt felelő fiúk számának várható értéke és szórása?

6. Egy készülékben 7 biztosíték van. 1/7 valószínűséggel romlik el valamelyikük. Várhatóan hányadik csere alkalmával cseréljük az utolsó eredeti biztosítékot?