Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** 2012. október 18.

1. Tegyük fel, hogy egy ember magassága centiméterben mérve 176 várható értékű és 8 szórású normális eloszlású valószínűségi változó, és az egyes emberek magassága egymástól független.
   a) Határozzuk meg 100 ember átlagos magasságának várható értékét. (4 pont)
   b) Milyen m-re igaz, hogy 100 ember átlagos magassága $0,97$ valószínűséggel kisebb m-nél? (8 pont)

2. Az X_n valószínűségi változó $1/n$ valószínűséggel n^2-et, különben 1-et vesz fel ($n \geq 2$). Az Y valószínűségi változó lehetséges értékei 1 és -1, mindkettőt $1/2$ valószínűséggel veszi fel. Igaz-e, hogy az X_nY sorozat eloszlásban konvergens, ha az X_n függetlenek egymástól és Y-tól is? (10 pont)

3. Egy társasjátékban egy szabályos kockával dob felváltva Kata és Vera. Jelölje X, hogy Kata hányadik (saját) dobásánál dob először hatost, Y pedig azt, hogy Vera hányadik (saját) dobásánál dob először egyest. Határozzuk meg $X - Y$ karakterisztikus függvényét. (10 pont)

4. A $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzetből választunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint. Jelölje X a kiválasztott pont első koordinátáját, Y a másodikat.
   a) Határozzuk meg $X + Y$ és $X - Y$ együttes sűrűségfüggvényét. (10 pont)
   b) Határozzuk meg $X - Y$ várható értékét. (4 pont)
   c) Igaz-e, hogy $X + Y$ és $X - Y$ függetlenek? (4 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa: 21 pont. Ponthatárok: 42, 56, 70, 84.

Valószínűségszámítás **1. zárthelyi dolgozat** 2012. október 16.

1. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, normális eloszlású, 10 várható értékű és 4 szórású valószínűségi változók.

   a) Mennyi annak valószínűsége, hogy $X_1 < 20$? (4 pont)

   b) Határozzuk meg $X_1, \ldots, X_6$ átlagának eloszlását. (4 pont)

   c) Mihez konvergál $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}$ 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$? (8 pont)

2. Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, és $h(t) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-t)$, ha $t \in (0,1)$. Határozzuk meg $h(X)$ sűrűségfüggvényét. (10 pont)

3. Egy osztályban a fiúk egy tanévbeli késéseinek száma összesen Poisson-eloszlású 121 paraméterrel, a lányoké Poisson-eloszlású 86 paraméterrel. Legyen X az egész osztály összes késéseinek száma egy tanévben. Határozzuk meg X karakterisztikus függvényét, feltéve, hogy a fiúk és a lányok késései egymástól függetlenek. (10 pont)

4. Minden n pozitív egészre legyen X_n olyan valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, melyre

$$P(X_n = -n) = \frac{1}{n}, \qquad P(X_n = n) = \frac{1}{n}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n}.$$

   a) Igaz-e, hogy az (X_n) sorozat eloszlásban konvergens? Ha igen, mi a határértéke? (8 pont)

   b) Igaz-e, hogy az (X_n) sorozat sztochasztikusan konvergens? (6 pont)

A megoldásokat indokolni kell. Az elégséges határa 21 pont. Ponthatárok: 42, 56, 70, 84.