Valószínűségszámítás **9. feladatsor** 2012. november 22.

Legyen S_n bolyongás: 0-ból indulva minden lépésben a korábbiaktól függetlenül p valószínűséggel felfelé, $q = 1 - p$ valószínűséggel lefelé lépünk egyet. S_n azt jelöli, hogy hova érkezünk n lépés után.

1. Milyen c-re igaz, hogy $S_n - nc$ martingál?
2. Bizonyítsuk be, hogy $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ martingál.
3. Legyen τ az első olyan időpont, amikor a bolyongás elér 10-be vagy -5-be.

   a) Bizonyítsuk be, hogy τ megállási idő.

   b) Mennyi annak valószínűsége, hogy $S_\tau = 10$, vagyis a bolyongás hamarabb ér 10-be, mint -5-be?

   c) Határozzuk meg τ várható értékét.

Valószínűségszámítás **9. feladatsor** 2012. november 22.

Legyen S_n bolyongás: 0-ból indulva minden lépésben a korábbiaktól függetlenül p valószínűséggel felfelé, $q = 1 - p$ valószínűséggel lefelé lépünk egyet. S_n azt jelöli, hogy hova érkezünk n lépés után.

1. Milyen c-re igaz, hogy $S_n - nc$ martingál?
2. Bizonyítsuk be, hogy $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ martingál.
3. Legyen τ az első olyan időpont, amikor a bolyongás elér 10-be vagy -5-be.

   a) Bizonyítsuk be, hogy τ megállási idő.

   b) Mennyi annak valószínűsége, hogy $S_\tau = 10$, vagyis a bolyongás hamarabb ér 10-be, mint -5-be?

   c) Határozzuk meg τ várható értékét.

Valószínűségszámítás **9. feladatsor** 2012. november 22.

Legyen S_n bolyongás: 0-ból indulva minden lépésben a korábbiaktól függetlenül p valószínűséggel felfelé, $q = 1 - p$ valószínűséggel lefelé lépünk egyet. S_n azt jelöli, hogy hova érkezünk n lépés után.

1. Milyen c-re igaz, hogy $S_n - nc$ martingál?
2. Bizonyítsuk be, hogy $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ martingál.
3. Legyen τ az első olyan időpont, amikor a bolyongás elér 10-be vagy -5-be.

   a) Bizonyítsuk be, hogy τ megállási idő.

   b) Mennyi annak valószínűsége, hogy $S_\tau = 10$, vagyis a bolyongás hamarabb ér 10-be, mint -5-be?

   c) Határozzuk meg τ várható értékét.

1. Legyenek az $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, $E(X_n) = 0$, $D^2(X_n) = \sigma_n^2$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Mutassuk meg, hogy $S_n^2 - B_n^2$ martingál.

2. Egy részeg ember bolyong a síkon a lámpaoszloptól indulva. Minden lépése egységnyi hosszúságú, az iránya viszont véletlenszerű. Jelölje X_n a távolságát az oszloptól n lépés után. Mutassuk meg, hogy $X_n^2 - n$ martingál.

3. Legyen X_n a következő tulajdonságú, $[0,1]$-beli értékeket felvevő valószínűségiváltozó-sorozat: $X_1 = a$ valamely $0 < a < 1$-re és
$$P\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \middle| \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n; \quad P\left(X_{n+1} = \frac{X_n + 1}{2} \middle| \mathcal{F}_n\right) = X_n.$$
Mutassuk meg, hogy X_n L_1-ben konvergens martingál. Adjuk meg X_∞ eloszlását.

4. Mutassuk meg, hogy ha az X_n szubmartingálra $E(X_n) = E(X_1)$ minden n-re, akkor X_n martingál.

5. (beadható november 29-ig) Lehet-e egyszerre X_n és X_n^2 is martingál az $X_1, \ldots, X_n$ által generált σ-algebrára nézve?

6. Tekintsük a következő bolyongást: $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$, az X_i is az $1, -1$ értékeket veszi fel, de $P(X_i = X_{i-1}) = p$ és $P(X_i = -X_{i-1}) = 1 - p$. Legyen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mutassuk meg, hogy $S_n + \frac{X_n}{2(1-p)}$ martingál.

7. Legyen $a, b > 0$, tegyük fel, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$ és $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál. Ekkor $(aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n)$ és $(\max(X_n, Y_n), \mathcal{F}_n)$ is szubmartingál. Fogalmazzuk meg az analóg állításokat szupermartingálokra!

8. (beadható december 6-ig) Legyenek a, b valósak és tegyük fel, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingál, $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ pedig szubmartingál. Mutassuk meg, hogy $(aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, ha $b > 0$.

9. Legyen X_n független valószínűségi változók sorozata a következő eloszlással: $P(X_n = 1/2) = P(X_n = 3/2) = 1/2$. Legyen $Y_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$. Mutassuk meg, hogy martingál. Hova konvergál? Mi következik ebből?

10. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók az alábbi eloszlással:
$$P(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2}; \quad P\left(X_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$
Mutassuk meg, hogy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ martingál a természetes σ-algebrasorozatra nézve. Mihez tart?

Valószínűségszámítás **7. feladatsor** 2012. november 8.

1. Mutassuk meg, hogy $\max(\nu, \mu)$, $\nu + \mu$, $\nu \cdot \mu$ megállási idők, ha μ és ν megállási idők.

2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi folyamatok mindegyike martingál.

   a) $S_n, S_n^2 - n, Y_n = t^n \left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^{S_n}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $0 < t < 1$ rögzített, (S_n) egyszerű szimmetrikus bolyongás.

   b) $Z_n = 2^n \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

   c) $Z_n = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n\lambda^2}{2}\right)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $\lambda > 0$ rögzített, $X_1, X_2, \ldots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg azt is, hogy

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left(\sum_{i=1}^k X_i - \frac{\alpha k}{2}\right) > \beta\right) \le e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

   d) (beadható november 22-ig) $Z_n = \left(\lambda^n \prod_{i=1}^n (X_{2i-1} + X_{2i})\right)^{-1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

3. Mutassuk meg, hogy $(I(\nu > n), \mathcal{F}_n)$ szupermartingál és $(I(\nu \le n), \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, ha ν megállási idő.

Valószínűségszámítás **7. feladatsor** 2012. november 8.

1. Mutassuk meg, hogy $\max(\nu, \mu)$, $\nu + \mu$, $\nu \cdot \mu$ megállási idők, ha μ és ν megállási idők.

2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi folyamatok mindegyike martingál.

   a) $S_n, S_n^2 - n, Y_n = t^n \left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^{S_n}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $0 < t < 1$ rögzített, (S_n) egyszerű szimmetrikus bolyongás.

   b) $Z_n = 2^n \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

   c) $Z_n = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n\lambda^2}{2}\right)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $\lambda > 0$ rögzített, $X_1, X_2, \ldots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg azt is, hogy

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left(\sum_{i=1}^k X_i - \frac{\alpha k}{2}\right) > \beta\right) \le e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

   d) (beadható november 22-ig) $Z_n = \left(\lambda^n \prod_{i=1}^n (X_{2i-1} + X_{2i})\right)^{-1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

3. Mutassuk meg, hogy $(I(\nu > n), \mathcal{F}_n)$ szupermartingál és $(I(\nu \le n), \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, ha ν megállási idő.

Valószínűségszámítás **6. feladatsor** 2012. október 25.

1. Egy szabályos érmével négyszer dobunk egymás után. Jelölje X a fejek számát az első két dobásból, Y a fejek számát a második két dobásból.
   a) Mennyi az összes fej számának várható értéke, azaz $E(X+Y)$? b) Mennyi az összes fej számának várható értéke, ha az első két dobásból nem volt fej, azaz $E(X+Y|X=0)$? c) Mennyi az összes fej számának várható értéke, ha az első két dobásból egy fej volt, azaz $E(X+Y|X=1)$? d) Mennyi az összes fej számának várható értéke, ha az első két dobás fej volt, azaz $E(X+Y|X=2)$? e) Határozzuk meg az összes fej számának X-re vonatkozó feltételes várható értékét, azaz $E(X+Y|X)$-t. f) Határozzuk meg $E(2X+3Y|X)$-t. g) Határozzuk meg $E(XY|X)$-t.
2. Legyenek X és Y független, azonos paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az alábbiakat: $\mathbb{P}\left(X=k|X<Y\right)$, $\mathbb{P}\left(X=k|X=Y\right)$, $\mathbb{P}\left(X=k|X+Y\right)$, $\mathbb{E}\left(X|X+Y\right)$.
3. $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók. $\mathcal{F}_n = \sigma\left(S_n, S_{n+1}, \ldots\right)$ minden n egészre, ahol $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mi lesz $\mathbb{E}\left(X_1 | \mathcal{F}_n\right)$?
4. (X,Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x,y) = e^{-y}$, ha $0<x<y$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}\left(X|Y\right)$-t és $\mathbb{E}\left(Y|X\right)$-t.
5. (X,Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x,y) = \frac{12}{5}(x+y)$, ha $0 \le \frac{x}{2} \le y \le 1-\frac{x}{2}$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}\left(Y|X\right)$-t.

Valószínűségszámítás **6. feladatsor** 2012. október 25.

1. Egy szabályos érmével négyszer dobunk egymás után. Jelölje X a fejek számát az első két dobásból, Y a fejek számát a második két dobásból.
   a) Mennyi az összes fej számának várható értéke, azaz $E(X+Y)$? b) Mennyi az összes fej számának várható értéke, ha az első két dobásból nem volt fej, azaz $E(X+Y|X=0)$? c) Mennyi az összes fej számának várható értéke, ha az első két dobásból egy fej volt, azaz $E(X+Y|X=1)$? d) Mennyi az összes fej számának várható értéke, ha az első két dobás fej volt, azaz $E(X+Y|X=2)$? e) Határozzuk meg az összes fej számának X-re vonatkozó feltételes várható értékét, azaz $E(X+Y|X)$-t. f) Határozzuk meg $E(2X+3Y|X)$-t. g) Határozzuk meg $E(XY|X)$-t.
2. Legyenek X és Y független, azonos paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az alábbiakat: $\mathbb{P}\left(X=k|X<Y\right)$, $\mathbb{P}\left(X=k|X=Y\right)$, $\mathbb{P}\left(X=k|X+Y\right)$, $\mathbb{E}\left(X|X+Y\right)$.
3. $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók. $\mathcal{F}_n = \sigma\left(S_n, S_{n+1}, \ldots\right)$ minden n egészre, ahol $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mi lesz $\mathbb{E}\left(X_1 | \mathcal{F}_n\right)$?
4. (X,Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x,y) = e^{-y}$, ha $0<x<y$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}\left(X|Y\right)$-t és $\mathbb{E}\left(Y|X\right)$-t.
5. (X,Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x,y) = \frac{12}{5}(x+y)$, ha $0 \le \frac{x}{2} \le y \le 1-\frac{x}{2}$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}\left(Y|X\right)$-t.

1. Adjunk példát olyan X, Y, Z független valószínűségi változókra, hogy $X+Y$ eloszlása megegyezik $X+Z$ eloszlásával, de Y és Z nem azonos eloszlású.

2. Mutassuk meg, hogy ha X a $[-1/2, 1/2]$ intervallumon, Y pedig a $\{-1/2, 1/2\}$ pontokon egyenletes eloszlású valószínűségi változók és egymástól függetlenek, akkor az összegük a $[-1, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású lesz. Milyen szögfüggvény-azonosság adódik ebből?

3. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, a $[-j, j]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy megfelelően normált összegük gyengén tart a standard normális eloszláshoz.

4. Tegyük fel, hogy $P(X_n = 1) = P(X_n = 1) = p_n,\ P(X_n = 0) = 1 - 2p_n$. Ellenőrizzük a Ljapunov– és a Lindeberg-feltételt, ha a (p_n) sorozat összege végtelen.

5. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy minden x-re $n \to \infty$ esetén
$$P\left(\frac{4\sum_{k=1}^{n} kX_k - n^2}{n^{3/2}} < x\right) \to \Phi\left(\frac{3x}{2}\right).$$

6. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ függetlenek. Mely esetekben teljesítik a Lindeberg-feltételt az alábbiak közül?

   a) $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = 1/2$.

   b) $P(X_n = 2^{n/2}) = P(X_n = -2^{n/2}) = 1/2$.

7. a) Adjunk példát olyan valószínűségiváltozó-sorozatra, ami a Lindeberg-feltételt kielégíti, de a Ljapunov-feltételt nem. (Például Pareto-eloszlások.)

   b) Képezzük a megadott valószínűségi változókból az $(a_n X_n)$ sorozatot. Adjunk feltételt arra, hogy teljesüljön rájuk a centrális határeloszlástétel.

Valószínűségszámítás **4. feladatsor** 2012. október 9–11.

1. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?
2. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?
3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?
4. (beadható október 18–ig) Legyen X_n Gamma(n, λ) eloszlású. Milyen eloszlású valószínűségi változóhoz konvergál X_n/n eloszlásban, ha $n \to \infty$?

Valószínűségszámítás **4. feladatsor** 2012. október 9–11.

1. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?
2. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?
3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?
4. (beadható október 18–ig) Legyen X_n Gamma(n, λ) eloszlású. Milyen eloszlású valószínűségi változóhoz konvergál X_n/n eloszlásban, ha $n \to \infty$?

Valószínűségszámítás **4. feladatsor** 2012. október 9–11.

1. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?
2. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?
3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?
4. (beadható október 18–ig) Legyen X_n Gamma(n, λ) eloszlású. Milyen eloszlású valószínűségi változóhoz konvergál X_n/n eloszlásban, ha $n \to \infty$?

1. Mutassuk meg, hogy a konstanshoz való eloszlásbeli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, vagyis ha (X_n) valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál egy c számhoz, akkor $X_n \to c$ sztochasztikusan is $n \to \infty$ esetén.
2. Mutassunk arra példát, hogy ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.
3. $\xi_n \to \xi$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $\xi_n - \xi \to 0$ eloszlásban?
4. (beadható október 18-ig) Mutassuk meg, hogy ha ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $\xi_n \to \xi$ eloszlásban és $\eta_n \to 0$ sztochasztikusan, akkor $\xi_n \eta_n \to 0$ eloszlásban.
5. Határozzuk meg a geometriai és exponenciális eloszlású valószínűségi változók karakterisztikus függvényét!
6. Karakterisztikus függvények-e a következők: $\cos^2 t, e^{-|t|}, |\Phi(t)|^2$, ahol Φ karakterisztikus függvény.
7. (beadható október 18-ig) Bizonyítsuk be, hogy független $\mathrm{Gamma}(a, \lambda)$ és $\mathrm{Gamma}(b, \lambda)$ eloszlású valószínűségi változók összege $\mathrm{Gamma}(a + b, \lambda)$ eloszlású.
8. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változóra $\mathbb{E}(2^X) = 4$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{P}(X > 3) \leq 1/2$.

Az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye: $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) \quad (t \in \mathbb{R})$.

Az $a > 1$ rendű és $\lambda > 0$ paraméterű gamma-eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} I(x > 0),$$

ahol

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}.$$

$X_n \to X$ eloszlásban: legyen F_n az X_n, F pedig az X eloszlásfüggvénye. Annak kell teljesülnie, hogy $F_n(t) \to F(t)$ minden olyan $t \in \mathbb{R}$-re, melyre F folytonos t-ben.

Valószínűségszámítás **2. feladatsor** 2012. szeptember 18–20.

1. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, \pi)$ intervallumon. Mi $\mathrm{tg}(X)$ sűrűségfüggvénye?
2. X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mi X^2 sűrűségfüggvénye?
3. Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $1 - e^{-\lambda X}$ sűrűségfüggvényét.
4. Legyen U p szabadságfokú χ^2 eloszlású, V tőle független q szabadságfokú χ^2 eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $U + V$ és $\frac{U}{U+V}$ függetlenek és határozzuk meg eloszlásukat!
5. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független p-indikátorok. Mihez konvergál az $(X_1^5 + ... + X_n^5)/n$ sorozat 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$?
6. X_i jelölje az i. kockadobás eredményét. Mihez konvergál az $(X_1^2 + ... + X_n^2)/n$ sorozat 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$?

Valószínűségszámítás **2. feladatsor** 2012. szeptember 18–20.

1. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, \pi)$ intervallumon. Mi $\mathrm{tg}(X)$ sűrűségfüggvénye?
2. X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mi X^2 sűrűségfüggvénye?
3. Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $1 - e^{-\lambda X}$ sűrűségfüggvényét.
4. Legyen U p szabadságfokú χ^2 eloszlású, V tőle független q szabadságfokú χ^2 eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $U + V$ és $\frac{U}{U+V}$ függetlenek és határozzuk meg eloszlásukat!
5. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független p-indikátorok. Mihez konvergál az $(X_1^5 + ... + X_n^5)/n$ sorozat 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$?
6. X_i jelölje az i. kockadobás eredményét. Mihez konvergál az $(X_1^2 + ... + X_n^2)/n$ sorozat 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$?

Valószínűségszámítás **2. feladatsor** 2012. szeptember 18–20.

1. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, \pi)$ intervallumon. Mi $\mathrm{tg}(X)$ sűrűségfüggvénye?
2. X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mi X^2 sűrűségfüggvénye?
3. Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $1 - e^{-\lambda X}$ sűrűségfüggvényét.
4. Legyen U p szabadságfokú χ^2 eloszlású, V tőle független q szabadságfokú χ^2 eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $U + V$ és $\frac{U}{U+V}$ függetlenek és határozzuk meg eloszlásukat!
5. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független p-indikátorok. Mihez konvergál az $(X_1^5 + ... + X_n^5)/n$ sorozat 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$?
6. X_i jelölje az i. kockadobás eredményét. Mihez konvergál az $(X_1^2 + ... + X_n^2)/n$ sorozat 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$?

Valószínűségszámítás **1. feladatsor** 2012. szeptember 11–13.

1. Egy kalapban cédulák vannak a következő számokkal:

$$\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 51, 52, 61\}.$$

Véletlenszerűen kihúzunk egy cédulát, mindegyiket egyenlő valószínűséggel választva. Jelölje X az első, Y a második számjegyét. Számítsuk ki az alábbiakat:

a) $P(X = 3, Y = 4)$;

b) $P(X < 3, Y < 4)$;

c) $P(X < 3)$;

d) $P(X = k)$ minden $k = 1, 2, \dots, 6$ számra, azaz X eloszlása;

e) $E(X)$, azaz X várható értéke;

f) $D(X)$, azaz X szórása;

g) (beadható szeptember 27-ig) $R(X, Y)$, azaz X és Y korrelációs együtthatója.

2. Tekintsük a síkon az $\{(x, y) \in [0, 1]^2 : x+y \leq 1\}$ háromszöget. Válasszunk egy pontot erről egyenletes eloszlás szerint. Jelölje X az első, Y a második koordinátáját. Számítsuk ki az alábbiakat:

a) $P(X = \frac{1}{3}, Y = \frac{1}{2})$;

b) $P(X < \frac{1}{3}, Y < \frac{1}{2})$;

c) $P(X < \frac{1}{3})$;

d) $P(X < t)$ minden t valós számra, azaz X eloszlásfüggvénye;

e) X sűrűségfüggvénye;

f) $E(X)$, azaz X várható értéke;

g) $D(X)$, azaz X szórása;

h) (beadható szeptember 27-ig) $R(X, Y)$, azaz X és Y korrelációs együtthatója.

i) X feltételes sűrűségfüggvénye az $Y = 1/2$ feltétel mellett.

3. Egy szabályos dobókockával dobunk kétszer egymás után. Számítsuk ki és ábrázoljuk a dobott számok összegének eloszlását.

4. Legyenek X és Y független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki $X + Y$ eloszlás– és sűrűségfüggvényét.

5. Legyen X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, Y pedig tőle független, egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Adjuk meg $X + Y$ sűrűségfüggvényét.

6. Legyen X standard normális eloszlású. Adjuk meg $Y = X^2$ várható értékét. Milyen eloszlású $X + Z$, ha Z normális eloszlású 1 várható értékkel és 2 szórással?

7. Jelölje X_i az i. kockadobás eredményét. Mihez konvergál $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}$ sztochasztikusan, ha $n \to \infty$?

8. Egy készülékben 7 biztosíték van. Időnként az egyik elromlik – mindegyik 1/7 valószínűséggel–, és ki kell cserélni. Várhatóan hányadik csere alkalmával cseréljük az utolsó eredeti biztosítékot?