1. Mutassuk meg, hogy $D^2(X) < \infty$ esetén $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ nem más, mint X merőleges vetülete az $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ altérre.

2. Legyenek X és Y független, azonos paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki az alábbiakat: $\mathbb{P}(X = k|X < Y)$, $\mathbb{P}(X = k|X = Y)$, $\mathbb{P}(X = k|X + Y)$, $\mathbb{E}(X|X + Y)$.

3. $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók. $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$ minden n egészre, ahol $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mi lesz $\mathbb{E}(X_1|\,\mathcal{F}_n)$?

4. (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = e^{-y}$, ha $0 < x < y$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X|Y)$-t és $\mathbb{E}(Y|X)$-t.

5. (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \frac{12}{5}(x + y)$, ha $0 \le \frac{x}{2} \le y \le 1 - \frac{x}{2}$, és 0 különben. Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y|X)$-t.

6. Bizonyítsuk be a teljes szórásnégyzet tételét! $D^2(\xi) < \infty$ esetén
$$D^2(\xi) = D^2(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F})) + \mathbb{E}\left(D^2(\xi|\mathcal{F})\right).$$

7. A buszok átlagosan 10 percenként követik egymást exponenciális eloszlás szerint. 10 órakor érkezünk a megállóba. Várhatóan hány percet kell várakoznunk?

8. Mutassuk meg, hogy $\nu = \inf\{n : X_n > Y_n\}$ megállási idő az $(\mathcal{F}_n)$ σ-algebrasorozatra névze, ha X_n és Y_n $\mathcal{F}_n$-mérhetőek minden $n \ge 1$-re.

9. Mutassuk meg, hogy $\max(\nu, \mu)$, $\nu + \mu$, $\nu \cdot \mu$ megállási idők, ha μ és ν megállási idők.

10. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi folyamatok mindegyike martingál.

    a) $Y_n = t^n \left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^{S_n}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $0 < t < 1$ rögzített, (S_n) egyszerű szimmetrikus bolyongás.

    b) $Z_n = 2^n \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

    c) $Z_n = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n\lambda^2}{2}\right)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $\lambda > 0$ rögzített, $X_1, X_2, \ldots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg azt is, hogy
    $$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left(\sum_{i=1}^k X_i - \frac{\alpha k}{2}\right) > \beta\right) \le e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

    d) $Z_n = \left(\lambda^n \prod_{i=1}^n (X_{2i-1} + X_{2i})\right)^{-1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, ahol $X_1, X_2, \ldots$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

11. Mutassuk meg, hogy $(I(\nu > n), \mathcal{F}_n)$ szupermartingál és $(I(\nu \le n), \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, ha ν megállási idő.

Valószínűségszámítás **8. feladatsor** 2011. november 25.

1. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?
2. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?
3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?

Valószínűségszámítás **8. feladatsor** 2011. november 25.

1. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?
2. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?
3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?

Valószínűségszámítás **8. feladatsor** 2011. november 25.

1. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?
2. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?
3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?

Valószínűségszámítás **8. feladatsor** 2011. november 25.

1. Mennyi garanciát adjunk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?
2. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100 g várható értékkel és 3 g szórással, valamint, hogy az egyes táblák tömege egymástól független. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál?
3. Legalább hány embert kell megkérdeznünk egy közvéleménykutatásnál, ha azt szeretnénk, hogy ez alapján egy párt támogatottságát legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nél kisebb hibával becsüljük meg?

Valószínűségszámítás **7. feladatsor** 2011. november 11.

1. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független p-indikátorok. Mihez konvergál $(X_1^5 + ... + X_n^5)/n$ sztochasztikusan, ha $n \to \infty$?
2. X_i jelölje az i. kockadobás eredményét. Mihez konvergál $(X_1^2 + ... + X_n^2)/n$ sztochasztikusan, ha $n \to \infty$?
3. Mutassuk meg, hogy a konstanshoz való eloszlásbeli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.
4. Az X valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon veszi fel értékeit és sűrűségfüggvénye ott folytonos. Mihez tart $\{nX\}$, azaz nX törtrésze eloszlásban, ha $n \to \infty$?
5. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, hogy $P\left(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ végtelen sok } n-\text{re }\right) = 0$.
6. Mutassunk arra példát, hogy ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.
7. $\xi_n \to \xi$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $\xi_n - \xi \to 0$ eloszlásban?
8. (beadható november 18-ig) Mutassuk meg, hogy ha ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $\xi_n \to \xi$ eloszlásban és $\eta_n \to 0$ sztochasztikusan, akkor *a)* $\xi_n + \eta_n \to \xi$ eloszlásban; *b)* $\xi_n \eta_n \to 0$ sztochasztikusan.
9. Határozzuk meg a Pascal–, $(-1,1)$-en egyenletes, exponenciális és gamma eloszlású valószínűségi változók karakterisztikus függvényeit!
10. Karakterisztikus függvények-e a következők: $\cos^2 t, e^{-|t|}, |\Phi(t)|^2$, ahol Φ karakterisztikus függvény.
11. Mutassuk meg, hogy ha létezik $t_0 \neq 0 : |\Phi(t_0)| = 1$, akkor a megfelelő eloszlás rácsos.

Valószínűségszámítás **7. feladatsor** 2011. november 11.

1. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független p-indikátorok. Mihez konvergál $(X_1^5 + ... + X_n^5)/n$ sztochasztikusan, ha $n \to \infty$?
2. X_i jelölje az i. kockadobás eredményét. Mihez konvergál $(X_1^2 + ... + X_n^2)/n$ sztochasztikusan, ha $n \to \infty$?
3. Mutassuk meg, hogy a konstanshoz való eloszlásbeli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.
4. Az X valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon veszi fel értékeit és sűrűségfüggvénye ott folytonos. Mihez tart $\{nX\}$, azaz nX törtrésze eloszlásban, ha $n \to \infty$?
5. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, hogy $P\left(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ végtelen sok } n-\text{re }\right) = 0$.
6. Mutassunk arra példát, hogy ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.
7. $\xi_n \to \xi$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $\xi_n - \xi \to 0$ eloszlásban?
8. (beadható november 18-ig) Mutassuk meg, hogy ha ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $\xi_n \to \xi$ eloszlásban és $\eta_n \to 0$ sztochasztikusan, akkor *a)* $\xi_n + \eta_n \to \xi$ eloszlásban; *b)* $\xi_n \eta_n \to 0$ sztochasztikusan.
9. Határozzuk meg a Pascal–, $(-1,1)$-en egyenletes, exponenciális és gamma eloszlású valószínűségi változók karakterisztikus függvényeit!
10. Karakterisztikus függvények-e a következők: $\cos^2 t, e^{-|t|}, |\Phi(t)|^2$, ahol Φ karakterisztikus függvény.
11. Mutassuk meg, hogy ha létezik $t_0 \neq 0 : |\Phi(t_0)| = 1$, akkor a megfelelő eloszlás rácsos.

Valószínűségszámítás **7. feladatsor** 2011. november 11.

1. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független p-indikátorok. Mihez konvergál $(X_1^5 + ... + X_n^5)/n$ sztochasztikusan, ha $n \to \infty$?
2. X_i jelölje az i. kockadobás eredményét. Mihez konvergál $(X_1^2 + ... + X_n^2)/n$ sztochasztikusan, ha $n \to \infty$?
3. Mutassuk meg, hogy a konstanshoz való eloszlásbeli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.
4. Az X valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon veszi fel értékeit és sűrűségfüggvénye ott folytonos. Mihez tart $\{nX\}$, azaz nX törtrésze eloszlásban, ha $n \to \infty$?
5. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, hogy $P\left(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \text{ végtelen sok } n-\text{re }\right) = 0$.
6. Mutassunk arra példát, hogy ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók és $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, de nem sztochasztikusan.
7. $\xi_n \to \xi$ eloszlásban. Következik-e ebből, hogy $\xi_n - \xi \to 0$ eloszlásban?
8. (beadható november 18-ig) Mutassuk meg, hogy ha ξ_n, ξ azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, $\xi_n \to \xi$ eloszlásban és $\eta_n \to 0$ sztochasztikusan, akkor *a)* $\xi_n + \eta_n \to \xi$ eloszlásban; *b)* $\xi_n \eta_n \to 0$ sztochasztikusan.
9. Határozzuk meg a Pascal–, $(-1,1)$-en egyenletes, exponenciális és gamma eloszlású valószínűségi változók karakterisztikus függvényeit!
10. Karakterisztikus függvények-e a következők: $\cos^2 t, e^{-|t|}, |\Phi(t)|^2$, ahol Φ karakterisztikus függvény.
11. Mutassuk meg, hogy ha létezik $t_0 \neq 0 : |\Phi(t_0)| = 1$, akkor a megfelelő eloszlás rácsos.

1. Határozzuk meg egy szabályos kockadobás szórásnégyzetét!
2. Határozzuk meg egy negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzetét!
3. Határozzuk meg az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzetét!
4. Becsüljük meg annak valószínűségét Markov– és Csebisev-egyenlőtlenséggel, hogy 1000 érmedobásból több, mint 600 fej jön ki! Oldjuk meg ennek felhasználásával is: $P(X > 600) = P\left((3/2)^X > (3/2)^{600}\right)$.
5. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását a következő táblázat mutatja.

Y/X	0	1	2
1	3/27	3/27	4/27
2	1/27	1/27	7/27
3	2/27	2/27	4/27

   Határozzuk meg X és Y eloszlását, várható értékét, szórásnégyzetét és a korrelációjukat!
6. Egy szabályos érmét dobálunk. Jelölje X az első azonosakból álló sorozat hosszát, Y a másodikét. Például fffiifífi esetén $X = 3$, és $Y = 2$. Határozzuk meg várható értéküket.
7. Két ládában vannak almák. Az elsőben 15 rossz és 27 jó, a másodikban 5 rossz és 52 jó. Az elsőből átteszünk a másodikba 17 almát. Mennyi a valószínűsége, hogy ezután jó almát választunk a második dobozból?
8. Egy játékteremben először a rulettkereket kell megforgatnunk. Ezután a kijött számot mondjuk be a játékautomatába, mely a számnak megfelelő paraméterű Poisson-eloszlású forintot ad. Mennyi a nyereményünk várható értéke?
9. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású véges szórású valószínűségi változók. Mennyi $R(X, X + Y)$?
10. Egy 52 lapos franciakártya-csomagból húzunk két lapot visszatevés nélkül. Legyen X a kőrök, Y az ászok száma. Adjuk meg X és Y korrelációs együtthatóját. Függetlenek-e ezek a változók?
11. Z kilenc paraméterű Poisson-eloszlású. $P(X_i < x|Z = k) = 1 - \exp(-(1 + k)x)$ $(i = 1, 2)$ és X_1, X_2 feltételesen függetlenek. Adjunk meg X_1, X_2 korrelációs együtthatóját.
12. (beadható feladat november 10-ig) Egy cukrászdában a naponta fagylaltozók száma, X, 200 paraméterű Poisson-eloszlású. Mindenki a többiektől függetlenül $1/4$ valószínűséggel kér kis adagot, különben nagyot. A kis adag ára 150 forint, a nagyé 250. Számítsuk ki X-nek és napi bevételnek a korrelációs együtthatóját.

1. Legyenek $X \sim N(a_1, \sigma_1)$ és $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg $X + Y$ eloszlását.
2. Legyenek $X \sim \text{Gamma}(a_1, \lambda)$ és $Y \sim \text{Gamma}(a_2, \lambda)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg $X + Y$ eloszlását.
3. Legyen U p szabadságfokú χ^2 eloszlású, V tőle független q szabadságfokú χ^2 eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $U + V$ és $\frac{U}{U+V}$ függetlenek és határozzuk meg eloszlásukat!
4. Számoljuk ki a geometriai, gamma, lognormális és negatív binomiális eloszlás várható értékét!
5. Mennyi a lottón kihúzott számok összegének várható értéke?
6. 21 dobozba véletlenszerűen 12 labdát teszünk. Mennyi az üres dobozok számának várható értéke?
7. 113 almából 15 férges. Kiválasztunk közülük 21-et és összeöntjük őket 12 jó almával. Mi a valószínűsége, hogy ezek közül egy almát választva, az férges lesz?
8. Egy készülékben 7 biztosíték van. 1/7 valószínűséggel romlik el valamelyikük. Várhatóan hányadik csere alkalmával cseréljük az utolsó eredeti biztosítékot?
9. $X_1, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású pozitív valószínűségi változók. Mennyi $\mathbb{E}\left[\frac{X_1+X_2+\ldots+X_k}{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right]$?
10. Mutassuk meg, hogy az X valószínűségi változó várható értéke pontosan akkor létezik, amikor $[X]$-é, továbbá $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[X]$ pontosan teljesül, ha X egész értékű.

Valószínűségszámítás **5. feladatsor** 2011. október 7.

1. Legyenek $X \sim N(a_1, \sigma_1)$ és $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg $X + Y$ eloszlását.
2. Legyenek $X \sim \text{Gamma}(a_1, \lambda)$ és $Y \sim \text{Gamma}(a_2, \lambda)$ független valószínűségi változók. Határozzuk meg $X + Y$ eloszlását.
3. Legyen U p szabadságfokú χ^2 eloszlású, V tőle független q szabadságfokú χ^2 eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $U + V$ és $\frac{U}{U+V}$ függetlenek és határozzuk meg eloszlásukat!
4. Számoljuk ki a geometriai, gamma, lognormális és negatív binomiális eloszlás várható értékét!
5. Mennyi a lottón kihúzott számok összegének várható értéke?
6. 21 dobozba véletlenszerűen 12 labdát teszünk. Mennyi az üres dobozok számának várható értéke?
7. 113 almából 15 férges. Kiválasztunk közülük 21-et és összeöntjük őket 12 jó almával. Mi a valószínűsége, hogy ezek közül egy almát választva, az férges lesz?
8. Egy készülékben 7 biztosíték van. 1/7 valószínűséggel romlik el valamelyikük. Várhatóan hányadik csere alkalmával cseréljük az utolsó eredeti biztosítékot?
9. $X_1, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású pozitív valószínűségi változók. Mennyi $\mathbb{E}\left[\frac{X_1+X_2+\ldots+X_k}{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right]$?
10. Mutassuk meg, hogy az X valószínűségi változó várható értéke pontosan akkor létezik, amikor $[X]$-é, továbbá $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[X]$ pontosan teljesül, ha X egész értékű.

Valószínűségszámítás **4. feladatsor** 2011. október 7.

1. Határozzuk meg az A és B események indikátorfüggvényeinek együttes eloszlásfüggvényét!
2. Milyen a és b értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény: $F(x) = e^{-be^{-ax}}$.
3. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, 1)$ intervallumon. Az intervallumot X két részre osztja. Jelöljük a hosszabb hosszát $Y(1)$-gyel, a rövidebbét $Y(2)$-vel. Határozzuk meg eloszlásfüggvényeiket!
4. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, p)$ intervallumon. Mi $\mathrm{tg}(X)$ sűrűségfüggvénye?
5. X *a)* exponenciális eloszlású valószínűségi változó; *b)* egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, 1)$ intervallumon. Mi $-\ln(X)$ sűrűségfüggvénye?
6. X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mi X^2 sűrűségfüggvénye?
7. Valószínűségi változó lineáris transzformáltjának mi az eloszlás– és sűrűségfüggvénye?
8. Y standard normális eloszlású. Mennyi $\mathbb{P}(-1 < Y < 1)$ és $\mathbb{P}(-1 < Y < -0.2)$?
9. $Y \sim N(1, 4)$. Mennyi $\mathbb{P}(Y < 3)$, $\mathbb{P}(-1 < Y < 1)$, $\mathbb{P}(-1 < Y < -0.2)$?
10. (beadható) Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $1 - e^{-\lambda X}$ sűrűségfüggvényét.

Valószínűségszámítás **4. feladatsor** 2011. október 7.

1. Határozzuk meg az A és B események indikátorfüggvényeinek együttes eloszlásfüggvényét!
2. Milyen a és b értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény: $F(x) = e^{-be^{-ax}}$.
3. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, 1)$ intervallumon. Az intervallumot X két részre osztja. Jelöljük a hosszabb hosszát $Y(1)$-gyel, a rövidebbét $Y(2)$-vel. Határozzuk meg eloszlásfüggvényeiket!
4. X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, p)$ intervallumon. Mi $\mathrm{tg}(X)$ sűrűségfüggvénye?
5. X *a)* exponenciális eloszlású valószínűségi változó; *b)* egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, 1)$ intervallumon. Mi $-\ln(X)$ sűrűségfüggvénye?
6. X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mi X^2 sűrűségfüggvénye?
7. Valószínűségi változó lineáris transzformáltjának mi az eloszlás– és sűrűségfüggvénye?
8. Y standard normális eloszlású. Mennyi $\mathbb{P}(-1 < Y < 1)$ és $\mathbb{P}(-1 < Y < -0.2)$?
9. $Y \sim N(1, 4)$. Mennyi $\mathbb{P}(Y < 3)$, $\mathbb{P}(-1 < Y < 1)$, $\mathbb{P}(-1 < Y < -0.2)$?
10. (beadható) Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $1 - e^{-\lambda X}$ sűrűségfüggvényét.

1. 41 millió lottószelvényt töltenek ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy ötös találat? Lottósorsolásnál 90 szám közül húznak ötöt visszatevés nélkül.

2. Két kockadobásból az első eredményét jelöljük X-szel, a másodikét Y-nal. A következő eseményeket vizsgáljuk:
   A1: 2 osztója X-nek, 3 Y-nak. A2: 2 osztója Y-nak, 3 X-nek. A3: Y osztója X-nek.
   A4: X osztója Y-nak. A5: 2 osztója $X+Y$-nak. A6: 3 osztója $X+Y$-nak.
   Melyek lesznek közülük függetlenek?

3. Egy tízemeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Mindenki a többiektől függetlenül 1/10 eséllyel száll ki az egyes emeleteken. Mennyi a valószínűsége, hogy minden emeleten megáll a lift?

4. Péternek 25, Tamásnak 10 forintja van. Ha két érme feldobásánál két fej jön ki, akkor Péter nyer 1 forintot, különben Tamás, és ezt addig folytatják, amíg valamelyikőjüknek marad pénze. Mennyi a valószínűsége, hogy Péter veszti el összes pénzét?

5. Mi n kockadobás maximumának eloszlása?

6. Egy sportlövő 1/7 valószínűséggel talál el egy léggömböt minden egyes lövésnél a többitől függetlenül. Az ötödik találatig lő. Mi lövései számának eloszlása?

7. Az egyik tóban 100 ponty van, összesen pedig N hal. Egy bácsi addig horgászik, ameddig ki nem fog egy pontyot (a kifogottakat nem engedi vissza). Mi a kifogott halai számának eloszlása?

8. Y eloszlásfüggvénye F. Határozzuk meg az $aY+b$, Y^a $(Y>0)$, $\max(Y,1/Y)$ $(Y>0)$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényét!

9. $0<Y<3$ valószínűségi változó. Eloszlásfüggvénye ezen az intervallumon $F(x)=cx^3$. Mennyi c és $\mathbb{P}(-1<Y<1)$?

10. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?
    a) $F(x)=1-(\frac{c}{x})^a$, ha $x>c$ és 0 különben $(a,c>0)$.
    b) $F(x)=0$, ha $x<0$, $[x]/2$ 2-ig és 1 utána.
    c) $F(x)=2x/(x+1)$, ha $x>0$ és 0 különben.

11. (beadható) Két labdarúgócsapat, A és B páros sok mérkőzést játszik egymással. Minden meccset eldöntenek. Az A csapat nyerési valószínűsége 0,45. Az a csapat nyeri a kupát, amelyik több mérkőzést nyert meg. Hány mérkőzés esetén legnagyobb az A csapat esélye a kupa megnyerésére?

Valószínűségszámítás **2. feladatsor** 2011. szeptember 23.

1. Ákos és Bálint egy dobókockát dobálnak. Ha a dobás 1 vagy 2, Ákos nyer, ha 6, Bálint nyer, és a játék be is fejeződik, a maradék három dobásnál pedig folytatódik. Mennyi a valószínűsége, hogy a játék Ákos győzelmével fejeződik be?

2. Két fej-írás sorozat közül azt nevezzük jobbnak, amelyikre 1/2-nél nagyobb a valószínűsége annak, hogy egy szabályos érmét dobálva hamarabb következik be, mint a másik. FFI, IFF és IIF közül melyik melyiknél nevezhető jobbnak?

3. A főnököt egy napon kereső telefonok száma λ paraméterű Poisson-eloszlású. A titkárnő minden hívást a többitől függetlenül p valószínűséggel kapcsol be. Milyen az eloszlása a főnökhöz bekapcsolt telefonok számának?

4. Egy berendezést sokkszerű hatások érnek, amelyek következtében előbb-utóbb tönkremegy. A tönkremenéshez vezető sokkok száma p paraméterű geometriai eloszlású. A karbantartók minden egyes sokkról csak c valószínűséggel szereznek tudomást. Ők milyennek látják a tönkremenéshez vezető sokkok számának eloszlását?

5. (beadható) Egy ötfős bírói testület többségi döntéssel alkot véleményt a vádlott bűnösségéről. A bírák közül ketten 0,05-0,05, ketten 0,1-0,1 valószínűséggel tévednek, az ötödik pedig 0,2 valószínűséggel hoz rossz döntést.
a) Ha egymástól függetlenül ítélkeznek, mennyi a valószínűsége, hogy a többségi döntés helyes?
b) A legnagyobb valószínűséggel tévedő bíró feladja függetlenségét és ezután mindig ugyanúgy szavaz, mint az egyik legbiztosabb társa. Mennyivel nő a helyes többségi döntés valószínűsége?

Valószínűségszámítás **2. feladatsor** 2011. szeptember 23.

1. Ákos és Bálint egy dobókockát dobálnak. Ha a dobás 1 vagy 2, Ákos nyer, ha 6, Bálint nyer, és a játék be is fejeződik, a maradék három dobásnál pedig folytatódik. Mennyi a valószínűsége, hogy a játék Ákos győzelmével fejeződik be?

2. Két fej-írás sorozat közül azt nevezzük jobbnak, amelyikre 1/2-nél nagyobb a valószínűsége annak, hogy egy szabályos érmét dobálva hamarabb következik be, mint a másik. FFI, IFF és IIF közül melyik melyiknél nevezhető jobbnak?

3. A főnököt egy napon kereső telefonok száma λ paraméterű Poisson-eloszlású. A titkárnő minden hívást a többitől függetlenül p valószínűséggel kapcsol be. Milyen az eloszlása a főnökhöz bekapcsolt telefonok számának?

4. Egy berendezést sokkszerű hatások érnek, amelyek következtében előbb-utóbb tönkremegy. A tönkremenéshez vezető sokkok száma p paraméterű geometriai eloszlású. A karbantartók minden egyes sokkról csak c valószínűséggel szereznek tudomást. Ők milyennek látják a tönkremenéshez vezető sokkok számának eloszlását?

5. (beadható) Egy ötfős bírói testület többségi döntéssel alkot véleményt a vádlott bűnösségéről. A bírák közül ketten 0,05-0,05, ketten 0,1-0,1 valószínűséggel tévednek, az ötödik pedig 0,2 valószínűséggel hoz rossz döntést.
a) Ha egymástól függetlenül ítélkeznek, mennyi a valószínűsége, hogy a többségi döntés helyes?
b) A legnagyobb valószínűséggel tévedő bíró feladja függetlenségét és ezután mindig ugyanúgy szavaz, mint az egyik legbiztosabb társa. Mennyivel nő a helyes többségi döntés valószínűsége?

1. Mennyi a valószínűsége, hogy két szabályos dobókockával dobva az összeg *a)* 9? *b)* 10?
2. Melyik a valószínűbb: 4 kockadobásból legalább egy egyest dobunk; 24 dupla kockadobásból legalább egy dupla egyest dobunk. (de Méré)
3. Mennyi a valószínűsége, hogy egy körben találomra választott húr hossza nagyobb, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala? (Bertrand paradoxona)
4. Kettétörünk egy 1 m hosszú botot. Jelölje X a nagyobb rész hosszát és Y a rövidebbét. Mennyi $P(X < x)$ és $P(Y < x)$?
5. Jordán-formula: legyenek $A_1, \ldots, A_n$ események. Bizonyítsuk be, hogy annak valószínűsége, hogy ezek közül pontosan r darab következik be:
$$\sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{k+r}{r} S_{k+r},$$
ahol $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)$ minden $k = 1, \ldots, n$-re.
6. 50 ember 500 Ft-ossal, 50 ember 1000 Ft-ossal várakozik és a jegy 500 Ft-ba kerül. Mennyi a valószínűsége, hogy a sor nem akad el, ha a pénztárban nem volt pénz?
7. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyszerű szimmetrikus bolyongás a $2n$. lépésben visszatér a nullába? És annak, hogy a $2n$. lépésben tér vissza először?
8. Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle figura van. Mennyi a valószínűsége, hogy a 20. tojásnál lesz meg neki mind a 10 fajta?
9. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás hatos, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás hatos?
10. Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (1/3 az esélye a helyes találatra). Helyesen válaszolt. Mennyi a valószínűsége, hogy tudta is a helyes választ?
11. Egy televíziós játékban 3 ajtó közül választhat a játékos, az egyik mögé ajándék van rejtve. A játékos választása után a műsorvezető kinyit egy másik ajtót és mutatja, hogy ott nincs ajándék. Felajánlja a játékosnak, hogy még változtathat, melyik ajtót választja. Érdemes-e változtatni? (Monty Hall)
12. Egy játékos annyiszor lőhet egy léggömbre, ahány 6-ost dobott egymás után egy dobókockával (például, ha elsőre 6-ost, másodikra 2-est dob, akkor egyszer lőhet). Mennyi a valószínűsége, hogy szétlövi a léggömböt, ha egy lövésnél 1/1000 valószínűséggel talál?
13. Beadható feladat szeptember 23-ig: Egy harmincfős osztály tagjai sorakozónál találomra állnak fel *a)* egy sorba; *b)* egy körbe. Mennyi annak valószínűsége, hogy a legalacsonyabb és a legmagasabb gyerek között pontosan tízen állnak?
14. Beadható feladat szeptember 30-ig: Ákos feldob egy érmét ötvenszer, Bálint ötvenegyszer. Mennyi a valószínűsége, hogy Bálint több fejet dob?